Numération de base a

Il s'agit dans ce chapitre de représenter des nombres grâce à des chiffres. De même qu'en français, un mot sert à exprimer et des lettres servent à représenter un mot, en math, des nombres (entiers) servent à compter et des chiffres servent à représenter ces nombres. Il existe à travers l'histoire des maths de très nombreuses représentations des nombres comme par exemple  qui peut signifier le nombre douze. Dans ce complément, nous allons étudier une manière certainement plus efficace de représenter les nombres : les différents systèmes de numération.

1) Le système décimal.

Commençons par un système que l'on connaît bien, le système de numération de base 10 encore appelé système décimal. On dispose de dix symboles, les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Ces dix chiffres servent déjà à représenter les nombres à un seul chiffre : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (de même qu'il existe des mots constitués d'une seule lettre).

A partir de dix objets, on dit qu'on a une dizaine ou encore un paquet de dix, puis une dizaine et une unité, puis une dizaine et deux unités ... et on écrit 10 puis 11 puis 12, ... qui se lisent une fois dix plus zéro, une fois dix plus un, une fois dix plus deux, ...
A partir de vingt objets c'est-à-dire à partir du deuxième paquet de dix, on écrit 20, 21, $\ldots$, qui se lisent deux dizaines et zéro unité, deux dizaines et une unité, $\ldots$
A partir de dix paquets de dix, on dit qu'on a obtenu une centaine où cent est dix fois dix et on écrit 100, 101, ...
De manière plus générale, le nombre qui s'écrit 47081 dans le système décimal, doit se lire : $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 1 \times 10^0$.

De manière encore plus générale,

Théorème 1 et définition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Il existe un et un seul entier naturel p puis il existe un et un seul $(p+1)$-uplet $(c_0, c_1, \ldots, c_p) \in [\![0, 9]\!]^{p+1}$ tel que $c_p \neq 0$ puis

$$n = \sum_{k=0}^{p} c_k 10^k.$$

Les nombres c_p, c_{p-1}, $\ldots$, c_1, c_0, sont les **chiffres** de n en base 10. Le nombre de ces chiffres est $p+1 = E(\log(n))+1$.
Enfin,

$$\forall k \in [\![0, p]\!],\ c_k = E\left(\frac{n}{10^k}\right) - 10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right).$$

On écrit alors l'entier n sous la forme $n = \overline{c_p \ldots c_1 c_0}_{10}$ ou plus simplement, $n = c_p \ldots c_1 c_0$ s'il il n'y a pas d'ambiguïté sur la base et s'il n'y a pas de risque de confusion entre la juxtaposition des chiffres c_i et le produit des nombres c_i.

Démonstration .

Unicité. Si p puis $(c_0, \ldots, c_p)$ existent, alors, puisque $c_p \neq 0$,

$$1 \times 10^p \leqslant c_p \times 10^p + \ldots + c_1 \times 10 + c_0 = n \leqslant 9 \times 10^p + \ldots + 9 \times 10 + 9 = 9 \times \frac{10^{p+1} - 1}{10 - 1} = 10^{p+1} - 1 < 10^{p+1}.$$

Ainsi, nécessairement, $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ puis $p \leqslant \log(n) < p+1$ et finalement $p = E(\log(n))$. Ceci montre l'unicité de p.

Soit $k \in [\![0, p]\!]$. Si $n = c_p \times 10^p + \ldots + c_k \times 10^k + \ldots + c_1 \times 10 + c_0$ où chaque c_i est dans $[\![0, 9]\!]$, alors

$$\frac{n}{10^k} = c_p \times 10^{p-k} + \ldots + c_k \times 10^0 + \ldots + \frac{c_1}{10^{k-1}} + \frac{c_0}{10^k}.$$

Si $k < p$,

$$0 \leqslant \frac{c_{k+1}}{10} + \ldots + \frac{c_1}{10^{k-1}} + \frac{c_0}{10^k} \leqslant \frac{9}{10} + \ldots + \frac{9}{10^{k-1}} + \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^k}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^k} < 1$$

et donc $E\left(\frac{n}{10^k}\right) = c_p \times 10^{p-k} + \ldots + c_{k+1} \times 10 + c_k \times 10^0$. De même, $E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right) = c_p \times 10^{p-k-1} + \ldots + c_{k+1} \times 10^0$ et donc nécessairement

$$E\left(\frac{n}{10^k}\right)-10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)=\left(c_p\times 10^{p-k}+\ldots+c_{k+1}\times 10+c_k\times 10^0\right)-10\left(c_p\times 10^{p-k-1}+\ldots+c_{k+1}\times 10^0\right)=c_k.$$

Cette dernière égalité reste vrai si $k=p$ car $E\left(\frac{n}{10^p}\right)-10\times E\left(\frac{n}{10^{p+1}}\right)=c_p-10\times 0=c_p$.

Ainsi, on a nécessairement $p=E(\log(n))$ puis $\forall k\in[\![0,p]\!]$, $c_k=E\left(\frac{n}{10^k}\right)-10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)$. Ceci montre l'unicité de p et du $(p+1)$-uplet de chiffres $(c_0,\ldots,c_p)$.

Existence. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $p=E(\log(n))$ (p existe dans $\mathbb{N}$ car $n\geqslant 1$) puis $\forall k\in[\![0,p]\!]$, $c_k=E\left(\frac{n}{10^k}\right)-10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)$.

- D'abord, $p\leqslant\log(n)<p+1$ puis $10^p\leqslant n<10^{p+1}$.
- Ensuite, chaque c_k, $0\leqslant k\leqslant p$, est un entier relatif. Montrons plus précisément que $\forall k\in[\![0,p]\!]$, $0\leqslant c_k\leqslant 9$. Soit $k\in[\![0,p]\!]$.

$$E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)\leqslant\frac{n}{10^{k+1}}<E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)+1$$

puis

$$10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)\leqslant\frac{n}{10^k}<10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)+10.$$

$10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)$ est un entier inférieur ou égal à $\frac{n}{10^k}$ et $E\left(\frac{n}{10^k}\right)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{10^k}$.
Donc, $10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)\leqslant E\left(\frac{n}{10^k}\right)$ puis

$$c_k=E\left(\frac{n}{10^k}\right)-10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)\geqslant 0.$$

$10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)+10$ est un entier strictement supérieur à $\frac{n}{10^k}$ et donc $10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)+10\geqslant E\left(\frac{n}{10^k}\right)+1$ puis

$$c_k=E\left(\frac{n}{10^k}\right)-10E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)\leqslant 10-1=9.$$

- Enfin,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}c_k\times 10^k&=\sum_{k=0}^{p}\left(10^kE\left(\frac{n}{10^k}\right)-10^{k+1}E\left(\frac{n}{10^{k+1}}\right)\right)\\&=10^0E\left(\frac{n}{10^0}\right)-10^{p+1}E\left(\frac{n}{10^{p+1}}\right)\text{ (somme télescopique)}\\&=n\ \left(\text{car }0\leqslant\frac{n}{10^{p+1}}<1\right).\end{aligned}$$

Donc, l'entier p et le $(p+1)$-uplet $(c_0,\ldots,c_p)$ conviennent. ❏

2) Le système de base a, $a\geqslant 2$.

On recommence le même travail à la différence qu'au lieu de faire des paquets de dix puis des paquets de dix fois dix, ..., on fait des paquets de a objets puis des paquets de $a\times a$ objets, ...
On a besoin pour cela de a chiffres ou encore a symboles et plus de dix chiffres. Quand $a=2$ (système binaire), on a besoin de deux chiffres. On choisit les symboles 0 et 1. Quand $a=3$, on a besoin de trois chiffres. On choisit les symboles 0, 1 et 2.
Quand $a=16$, on a besoin de seize symboles. On choisit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F.

On a le résultat suivant :

Théorème 2 et définition.

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Il existe un et un seul entier naturel p puis il existe un et un seul $(p+1)$-uplet $(c_0,c_1,\ldots,c_p)\in[\![0,a-1]\!]^{p+1}$ tel que $c_p\neq 0$ puis

$$n=\sum_{k=0}^{p}c_ka^k.$$

Les nombres c_p, c_{p-1}, ..., c_1, c_0, sont les **chiffres** de n en base a. Le nombre de ces chiffres est $p+1=E(\log_a(n))+1$.
Enfin,

$$\forall k\in[\![0,p]\!],\ c_k=E\left(\frac{n}{a^k}\right)-aE\left(\frac{n}{a^{k+1}}\right).$$

On écrit alors l'entier n sous la forme $n=\overline{c_p\ldots c_1c_0}_a$.

On va reproduire quasiment à l'identique la démonstration du théorème 1.

Démonstration .

Unicité. Si p puis $(c_0, \dots, c_p)$ existent, alors, puisque $c_p \neq 0$,

$$\begin{aligned}1 \times a^p &\leqslant c_p \times a^p + \dots + c_1 \times a + c_0 = n \\ &\leqslant (a-1) \times a^p + \dots + (a-1) \times a + (a-1) = (a-1) \times \frac{a^{p+1}-1}{a-1} = a^{p+1} - 1 < a^{p+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, nécessairement, $a^p \leqslant n < a^{p+1}$ puis $p \leqslant \log_a(n) < p+1$ (on rappelle que $a \geqslant 2$ et donc la fonction $x \mapsto \log_a(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$) et finalement $p = E(\log_a(n))$. Ceci montre l'unicité de p.

Soit $k \in [\![0, p]\!]$. Si $n = c_p \times a^p + \dots + c_k \times a^k + \dots + c_1 \times a + c_0$ où chaque c_i est dans $[\![0, a-1]\!]$, alors

$$\frac{n}{a^k} = c_p \times a^{p-k} + \dots + c_k \times a^0 + \dots + \frac{c_1}{a^{k-1}} + \frac{c_0}{a^k}.$$

Si $k < p$,

$$0 \leqslant \frac{c_{k+1}}{a} + \dots + \frac{c_1}{a^{k-1}} + \frac{c_0}{a^k} \leqslant \frac{a-1}{a} + \dots + \frac{a-1}{a^{k-1}} + \frac{a-1}{a^k} = \frac{a-1}{a} \times \frac{1 - \dfrac{1}{a^k}}{1 - \dfrac{1}{a}} = 1 - \frac{1}{a^k} < 1$$

et donc $E\left(\dfrac{n}{a^k}\right) = c_p \times a^{p-k} + \dots + c_{k+1} \times a + c_k \times a^0$. De même, $E\left(\dfrac{n}{a^{k+1}}\right) = c_p \times a^{p-k-1} + \dots + c_{k+1} \times a^0$ et donc nécessairement

$$E\left(\frac{n}{a^k}\right) - aE\left(\frac{n}{a^{k+1}}\right) = \left(c_p \times a^{p-k} + \dots + c_{k+1} \times a + c_k \times a^0\right) - a\left(c_p \times a^{p-k-1} + \dots + c_{k+1} \times a^0\right) = c_k.$$

Cette dernière égalité reste vrai si $k = p$ car $E\left(\dfrac{n}{a^p}\right) - a \times E\left(\dfrac{n}{a^{p+1}}\right) = c_p - 10 \times 0 = c_p$.

Ainsi, on a nécessairement $p = E(\log_a(n))$ puis $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $c_k = E\left(\dfrac{n}{a^k}\right) - aE\left(\dfrac{n}{a^{k+1}}\right)$. Ceci montre l'unicité de p et du $(p+1)$-uplet de chiffres $(c_0, \dots, c_p)$.

Existence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p = E(\log_a(n))$ (p existe dans $\mathbb{N}$ car $n \geqslant 1$) puis $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $c_k = E\left(\dfrac{n}{a^k}\right) - aE\left(\dfrac{n}{a^{k+1}}\right)$.

- D'abord, $p \leqslant \log_a(n) < p+1$ puis $a^p \leqslant n < a^{p+1}$.
- Ensuite, chaque c_k, $0 \leqslant k \leqslant p$, est un entier relatif. Montrons plus précisément que $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $0 \leqslant c_k \leqslant a-1$. Soit $k \in [\![0, p]\!]$.

$$E\left(\frac{n}{a^{k+1}}\right) \leqslant \frac{n}{a^{k+1}} < E\left(\frac{n}{a^{k+1}}\right) + 1$$

puis

$$aE\left(\frac{n}{a^{k+1}}\right) \leqslant \frac{n}{a^k} < aE\left(\frac{n}{a^{k+1}}\right) + a.$$

$aE\left(\dfrac{n}{a^{k+1}}\right)$ est un entier inférieur ou égal à $\dfrac{n}{a^k}$ et $E\left(\dfrac{n}{a^k}\right)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{n}{a^k}$.
Donc, $aE\left(\dfrac{n}{a^{k+1}}\right) \leqslant E\left(\dfrac{n}{a^k}\right)$ puis

$$c_k = E\left(\frac{n}{a^k}\right) - aE\left(\frac{n}{a^{k+1}}\right) \geqslant 0.$$

$aE\left(\dfrac{n}{a^{k+1}}\right) + a$ est un entier strictement supérieur à $\dfrac{n}{a^k}$ et donc $aE\left(\dfrac{n}{a^{k+1}}\right) + a \geqslant E\left(\dfrac{n}{a^k}\right) + 1$ puis

$$c_k = E\left(\frac{n}{a^k}\right) - aE\left(\frac{n}{a^{k+1}}\right) \leqslant a - 1.$$

- Enfin,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} c_k \times a^k &= \sum_{k=0}^{p} \left(a^k E\left(\frac{n}{a^k}\right) - a^{k+1} E\left(\frac{n}{a^{k+1}}\right)\right) \\ &= a^0 E\left(\frac{n}{a^0}\right) - a^{p+1} E\left(\frac{n}{a^{p+1}}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= n \text{ (car } 0 \leqslant \frac{n}{a^{p+1}} < 1).\end{aligned}$$

Donc, l'entier p et le $(p+1)$-uplet $(c_0, \dots, c_p)$ conviennent.

❏

3) Quelques exemples de bases et de décomposition.

a) La base 2

La base 2 utilise les deux chiffres 0 et 1.

Ecrivons 227 (écrit en base 10) en base 2. On commence par chercher la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 227.

$$1 \leqslant 2 \leqslant 4 \leqslant 8 \leqslant 16 \leqslant 32 \leqslant 64 \leqslant 128 \leqslant 227 < 256.$$

On peut donc écrire

$$227 = 128 + (227 - 128) = 128 + 99 = 1 \times 2^7 + 99.$$

On recommence avec 99 : $64 \leqslant 99 < 128$. On peut alors écrire :

$$227 = 1 \times 2^7 + 64 + (99 - 64) = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 35.$$

On termine :

$$227 = 128 + 64 + 32 + 2 + 1 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1.$$

Le nombre 227 (écrit en base 10) s'écrit donc $\overline{11100011}_2$ en base 2 ou plus simplement 11100011 en base 2.

Inversement, le nombre $n = \overline{101001}_2$ est le nombre

$$n = 1 + 0 \times 2 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 41.$$

De manière générale, tout nombre qui est un entier naturel non nul, est somme, de manière unique (à l'ordre près des termes de la somme), de puissances de 2. Cette propriété a énormément d'applications (l'une d'entre elles étant évidemment l'informatique). Par exemple, l'exponentiation rapide. Si on veut calculer 3^{38}, on effectue 37 multiplications. Mais si on décompose le nombre 37 en base 2,

$$38 = 32 + 4 + 2 = 2^5 + 2^2 + 2^1$$

alors,

$$3^38 = 3^{2^5+2^2+2} = \left(\left(\left(\left(3^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 \times \left(3^2\right)^2 \times 3^2$$

ce calcul ne nécessitant plus que au maximum $5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$ multiplications (si on ne garde pas en mémoire les valeurs de 3^2 puis de $\left(3^2\right)^2$, ...).

Savoir décomposer des nombres en base 2 permet aussi, par exemple, d'établir des stratégies gagnantes dans certains « jeux de Nim ». Par exemple, sur une table, on dispose un nombre quelconque de paquets d'allumettes et chaque paquet d'allumettes contient un nombre quelconque d'allumettes, deux paquets pouvant contenir un nombre différents d'allumettes. Deux joueurs jouent à tour de rôle en ramassant un nombre quelconque d'allumettes d'un seul paquet (en prenant tout ou partie de ce paquet). Le gagnant est celui qui ramasse la dernière allumette. Vous n'aurez pas la solution de ce problème ici.

b) La base 3

En base 3, on dispose de 3 chiffres : 0, 1 et 2.

Par exemple, le nombre $n = \overline{2101}_3$ est

$$n = 2 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1 = 64.$$

Inversement, écrivons le nombre $n = 264$ (écrit en base 10) en base 3. On commence par chercher la plus grande puissance de 3 inférieure ou égale à 264 :

$$3^5 = 243 \leqslant 264 < 729 = 3^6,$$

puis le plus grand multiple de 3^5 qui est inférieur ou égal à 264 :

$$1 \times 3^5 = 243 \leqslant 264 < 486 = 2 \times 3^5.$$

On commence la décomposition :

$$264 = 243 + 21 = 1 \times 3^5 + 21.$$

La plus grande puissance de 3 inférieure ou égale à 21 est $3^2 = 9$ puis le plus grand multiple de $3^2 = 9$ qui est inférieur ou égal à 21 est $2 \times 3^2 = 18$. On termine la décomposition :

$$264 = 243 + 18 + 3 = 1 \times 3^5 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1$$

et donc $n = \overline{100210}_3$.

c) La base 16

En base 16, on dispose de 16 « chiffres » : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Par exemple, le nombre $n = \overline{\mathsf{C}}_{16}$ est le nombre 12 en base 10. A titre d'exemple, déterminons l'écriture en base 10 de $n = \overline{\mathsf{A07B}}_{10}$:

$$n = 10 \times 16^3 + 0 \times 16^2 + 7 \times 16 + 11 = 41083.$$

On est passé de 4 chiffres en base 16 à 5 chiffres en base 10.

La base 16 permet par exemple de créer les couleurs sur le web. En rgb (red green blue), une couleur est caractérisée par une succession de 6 chiffres de la base 16. Par exemple, a1bb07. Les deux premiers chiffres indiquent une quantité de rouge, les deux suivants indiquent une quantité de vert et les deux derniers indiquent une quantité de bleu. Sur l'exemple, « on a mis $a1 = 10 \times 16 + 1 = 161$ de rouge », la quantité de rouge pouvant aller de 00 c'est-à-dire 0 à $\mathtt{ff}$ c'est-à-dire $15 \times 16 + 15 = 255 = 2^8 - 1$. Il y a donc 2^8 nuances de rouge possibles. On les combinent avec 2^8 nuances de vert et 2^8 nuances de bleu et on obtient un nombre de couleurs deux à deux distinctes égal à

$$2^8 \times 2^8 \times 2^8 = 2^{24} = 16\,777\,216.$$