Limites de fonctions en un point. Continuité en un point

Plan du chapitre

1 Limite en un point. Définitions

La notion de limite de fonction est très fastidieuse à définir en raison du grand nombre de situations différentes à analyser. Il vous faudra vous armer de patience pour lire tout ce qui suit.

1.1 Limite finie en un réel.

1.1.1 Définition

DÉFINITION 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est une extrémité de I (et pas nécessairement dans I). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Comme le prévoit le programme officiel, la définition précédente est donnée avec des inégalités larges. Elle pourrait tout autant être donnée avec des inégalités strictes comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est une extrémité de I (et pas nécessairement dans I). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon)\,.$$

DÉMONSTRATION .

• Supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Le réel ε' est un réel strictement positif et strictement inférieur à ε. Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, si x est un réel élément de I tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon'$. Si x est un élément de I,

$$|x-a| < \alpha \Rightarrow |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon' \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon)$.

• Supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel strictement positif α' tel que, si x est un élément de I tel que $|x-a| < \alpha'$, alors $|f(x)-\ell| < \varepsilon$. Soit $\alpha = \dfrac{\alpha'}{2}$. α est un réel strictement positif et strictement inférieur à α'. Si x est un élément de I,

$$|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |x-a| < \alpha' \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)$.

❏

Théorème 2 (unicité de la limite). Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est une extrémité de I (et pas nécessairement dans I). Soient ℓ et ℓ' deux réels (resp. deux complexes).

Si $f(x)$ tend vers ℓ et ℓ' quand x tend vers a, alors $\ell = \ell'$.

DÉMONSTRATION . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ et $\alpha' > 0$ tels que, si x est un élément de I vérifiant $|x-a| < \alpha$, alors $|f(x)-\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et si x est un élément de I vérifiant $|x-a| < \alpha'$, alors $|f(x)-\ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit x_0 un élément de $I \cap]a - \mathrm{Min}\{\alpha, \alpha'\}, a + \mathrm{Min}\{\alpha, \alpha'\}[$ ($\mathrm{Min}\{\alpha, \alpha'\} > 0$ et donc x_0 existe). Alors,

$$|\ell-\ell'| = \left|\ell - f(x_0) + f(x_0) - \ell'\right| \leqslant |\ell - f(x_0)| + \left|f(x_0) - \ell'\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

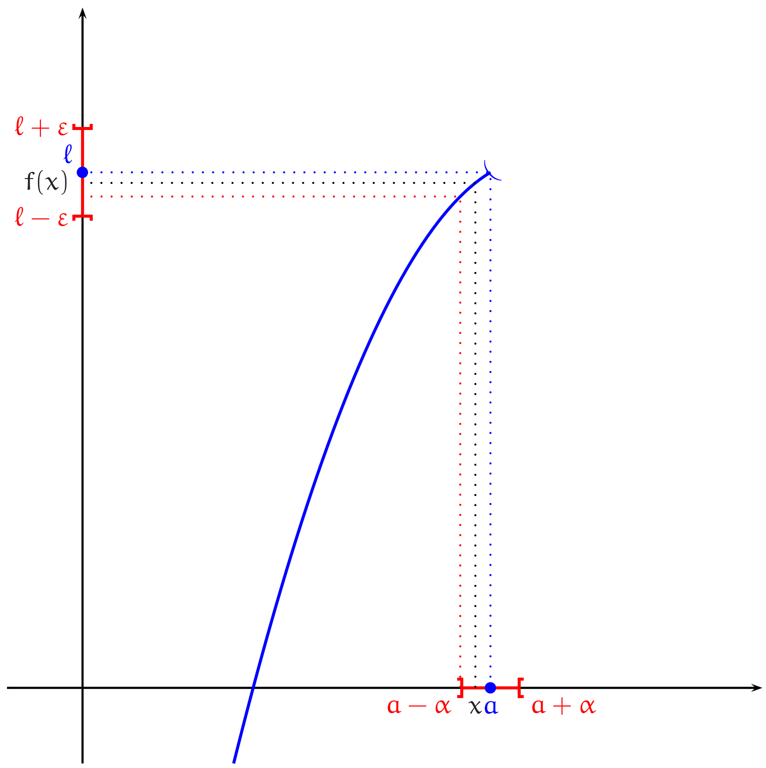
Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\ell-\ell'| < \varepsilon$. Ainsi, $|\ell-\ell'|$ est un réel positif ou nul qui est strictement plus petit que tout réel strictement positif et qui est en particulier différent de tout réel strictement positif. Il ne reste que $|\ell-\ell'| = 0$ puis $\ell = \ell'$.

❏

Ainsi, en cas d'existence, la limite est unique. Quand $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, on peut donc écrire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou plus simplement $\lim\limits_{a} f = \ell$.

Dans l'égalité $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, **la variable x est muette** ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{y \to a} f(y)$) ou encore $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ **n'est pas une fonction de x**. Une phrase du genre « $\forall x \in I$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$ » n'a absolument aucun sens.

Visualisons maintenant la définition 1 sur un graphique dans le cas d'une fonction à valeurs réelles. Pour chaque $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ contient tous les $f(x)$ où $x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap I$, α ayant été choisi suffisamment petit en fonction de ε.



Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est une extrémité de I (et pas nécessairement dans I).

On dit que f **converge en a** si et seulement si il existe ℓ un réel (resp. un complexe) tel que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

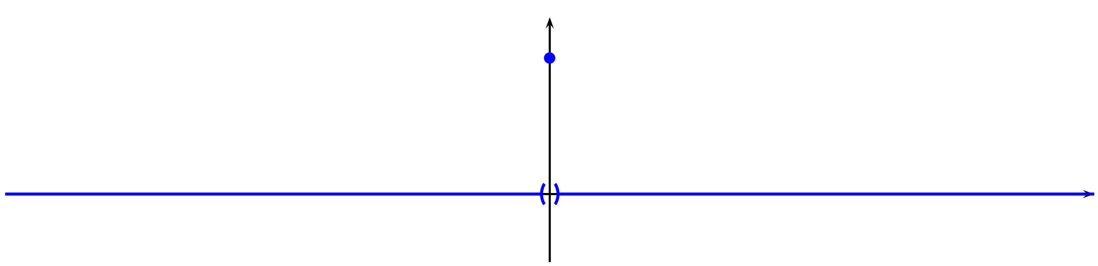
Théorème 3. Si a appartient à I et si f converge en a, alors nécessairement $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 1, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in I$, si $|x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Le réel $x = a$ est un réel de I tel que $|x - a| < \alpha$. On en déduit que $|f(a) - \ell| < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(a) - \ell| < \varepsilon$. Le réel $|f(a) - \ell|$ est un réel positif strictement plus petit que tout réel strictement positif et en particulier différent de tout réel strictement positif. Il ne reste que $|f(a) - \ell| = 0$ et donc $\ell = f(a)$.

❏

Dans le cas où le réel a appartient à l'intervalle I (le domaine de définition de la fonction f), la limite que nous venons de définir s'avère souvent peu pratique à utiliser. Considérons par exemple la fonction f définie sur $I =]-\infty, +\infty[$ par : pour tout réel x, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$. Voici son graphe



Nous avons envie de dire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et que cette valeur limite, à savoir 0, n'est pas $f(0)$ qui est égal à 1, ceci traduisant la discontinuité de la fonction f en 0. Pourtant, avec la définition de la limite que nous avons adoptée, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas. Vérifions-le explicitement.

Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$ existe, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ est nécessairement égale à 1 d'après le théorème 3. Soit alors $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Soit α un réel strictement positif quelconque. Le réel $x = \alpha$ est un réel tel que $|x-0| \leqslant \alpha$ et $|f(x)-\ell| = |0-1| = 1 > \varepsilon$.
Ainsi, $\exists \varepsilon > 0/\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}/\ (|x-0| \leqslant \alpha$ et $|f(x)-1| > \varepsilon)$. Donc, f ne converge pas vers 1 en 0 puis $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Ici, un autre type de limite existe : la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 **en restant différent de** 0. Cette limite, notée $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)$, existe et vaut 0.

En résumé, ici, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$. Ceci nous amène à la définition suivante :

DÉFINITION 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est une extrémité de I (et pas nécessairement dans I). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

On dit que $f(x)$ **tend vers ℓ quand x tend vers a en restant différent de** a et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (0 < |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$

⇨ **Commentaire** .

◇ *La seule nuance avec la définition 1 est que dans la définition 2, x n'est égal à a ($|x-a| > 0$).*

◇ *Si a n'est pas dans le domaine de définition de f, la limite de la définition 2 est la même que la limite de la définition 1. Par exemple, on peut écrire au choix $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.*

◇ *Quand $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on dit aussi que la fonction f converge en a.*

Théorème 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est une extrémité de I (et pas nécessairement dans I).

Si f converge en a, **alors** f est bornée au voisinage de a ou encore il existe $\alpha > 0$ tel que f est bornée sur $[a-\alpha, a+\alpha] \cap I$.

DÉMONSTRATION . Supposons que f est converge vers un certain un nombre ℓ en a. On applique la définition 1 avec $\varepsilon = 1$: il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $x \in [a-\alpha, a+\alpha] \cap I$, $|f(x)-\ell| \leqslant 1$. Pour $x \in [a-\alpha, a+\alpha] \cap I$, on a alors

$$|f(x)| = |f(x)-\ell+\ell| \leqslant |\ell| + |f(x)-\ell| \leqslant |\ell| + 1.$$

f est alors bornée sur $[a-\alpha, a+\alpha] \cap I$.

❑

Remarque. Le théorème 4 est également valable avec la limite de la limite de la définition 2.

Exercice 1. Montrer, en revenant à la définition, que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-1}{x+2} = \dfrac{2}{3}$.

Solution 1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in]-2, +\infty[$.

$$\left|f(x) - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3x-1}{x+2} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{7x-7}{3(x+2)}\right| = \frac{7|x-1|}{3|x+2|}.$$

Prenons déjà x dans $[0, 2]$. Alors, $|x+2| \geqslant 2$ puis $\left|f(x) - \dfrac{2}{3}\right| \leqslant \dfrac{7}{3\times 2}|x-1| = \dfrac{7}{6}|x-1|$.

Soit alors $\alpha = \text{Min}\left\{1, \dfrac{6\varepsilon}{7}\right\}$. α est un réel strictement positif. Si x est un réel tel que $|x-1| \leqslant \alpha$, on a en particulier $|x-1| \leqslant 1$ ou encore $x \in [0, 2]$. On a donc $\left|f(x) - \dfrac{2}{3}\right| \leqslant \dfrac{7}{6}|x-1|$. Mais on a aussi $|x-1| \leqslant \dfrac{6\varepsilon}{7}$ et donc

$$\left|f(x)-\frac{2}{3}\right| \leqslant \frac{7}{6}|x-1| \leqslant \frac{7}{6}\times\frac{6\varepsilon}{7}=\varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0/\ \forall x \in]-2,+\infty[,\ \left(|x-1| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|f(x)-\frac{2}{3}\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Donc, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{2}{3}$.

1.1.2 Limite à droite, limite à gauche

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

1) Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est l'extrémité droite de I (et pas nécessairement dans I).
On dit que $f(x)$ **tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs inférieures** et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\leqslant a}} f(x)=\ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0/\ \forall x\in I,\ (-\alpha \leqslant x-a \leqslant 0 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

On dit que $f(x)$ **tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs inférieures en restant différent de** a et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0/\ \forall x\in I,\ (-\alpha \leqslant x-a < 0 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

2) Soit a un réel qui, soit est dans I, soit est l'extrémité gauche de I (et pas nécessairement dans I).
On dit que $f(x)$ **tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs supérieures** et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\geqslant a}} f(x)=\ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0/\ \forall x\in I,\ (0 \leqslant x-a \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

On dit que $f(x)$ **tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs supérieures en restant différent de** a et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0/\ \forall x\in I,\ (0 < x-a \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Ainsi, par exemple, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} E(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\leqslant 1}} E(x)$ n'existe pas, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} E(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\geqslant 1}} E(x)=E(1)=1$ (où E désigne la fonction « partie entière »).
De manière générale, si $a\in I$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\leqslant a}} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors nécessairement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\leqslant a}} f(x)=f(a)$ et de même pour $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\geqslant a}} f(x)$.

Dans la pratique des classes préparatoires, il est fréquent qu'une fonction soit définie sur un ensemble qui n'est pas un intervalle mais une réunion d'intervalles. Par exemple, la fonction $x\mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. La notion de limite à droite ou à gauche permet de généraliser la notion de limite en un réel.

Définition 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle. Soit a un réel de I, qui n'est pas une extrémité de I. Soit f une fonction définie sur $I\setminus\{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si et seulement si

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0/\ \forall x\in I\setminus\{a\},\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Théorème 5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle. Soit a un réel de I, qui n'est pas une extrémité de I. Soit f une fonction définie sur $I\setminus\{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

f a une limite réelle (resp. complexe) en a si et seulement si f a une limite à droite réelle (resp. complexe) et une limite à gauche réelle (resp. complexe) en a et ces limites sont égales.

De plus, si f a une limite réelle en a, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\leqslant a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\geqslant a}} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Démonstration .

• Supposons que f ait une limite réelle (resp. complexe) ℓ en a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$).
Mais alors, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $(0 \leqslant x-a \leqslant \alpha \Rightarrow |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)$. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \ \forall x \in I \setminus \{a\},\ (0 \leqslant x-a \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$

Ceci montre que f a une limite à droite en a et que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = \ell$. De même, f a une limite à gauche en a et que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x) = \ell$.
Finalement, f a une limite à droite et à gauche en a et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

• Supposons que f ait une limite à droite réelle (resp. complexe) et une limite à droite gauche (resp. complexe) en a et que ces limites soient égales à un certain réel (resp. complexe) ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $(0 \leqslant x-a \leqslant \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)$ et il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $(-\alpha_2 \leqslant x-a \leqslant 0 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)$.

Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\}$. α est un réel strictement positif. Soit x un réel de $I \setminus \{a\}$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$.
Si $x > a$. $|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow 0 \leqslant x-a \leqslant \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$.
Si $x < a$. $|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow -\alpha_2 \leqslant x-a \leqslant 0 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \ \forall x \in I \setminus \{a\},\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$

Donc, f a une limite réelle (resp. complexe) et de plus, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x)$. ❏

Exercice 2. Soient a et b deux réels. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{bx}-1}{x} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+4}-a}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

Déterminer a et b tels que f ait une limite réelle quand x tend vers 0. Préciser cette limite en cas d'existence.

Solution 2. f est définie sur $\mathbb{R}^*$. f a une limite réelle en 0 si et seulement si f a une limite réelle à droite et à gauche en 0 et ces limites sont égales.

• Si $b \neq 0$, pour $x < 0$, $f(x) = \dfrac{e^{bx}-1}{x} = b \times \dfrac{e^{bx}-1}{bx}$ puis

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} b \times \frac{e^{bx}-1}{bx} = \lim_{X \to 0} b \times \frac{e^X-1}{X} = b.$$

Si $b = 0$, pour tout $x < 0$, $f(x) = 0$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$. Finalement, pour tout réel b, f a une limite réelle à gauche en 0 égale à b.

• Si $a \neq 2$, le numérateur de la fraction $\dfrac{\sqrt{x+4}-a}{x}$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0 alors que le dénominateur tend vers 0. Dans ce cas, f n'a pas de limite à droite réelle en 0.
Si $a = 2$, pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}.$$

Par suite, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

• Ainsi, f a une limite réelle en 0 si et seulement si $a = 2$ et $b = \dfrac{1}{4}$ et dans ce cas, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{4}$.

1.1.3 Lien avec les limites de suites

Avec les notations des paragraphes précédents,

Théorème 6. Si f a une limite réelle (resp. complexe) ℓ en a, alors pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I (ou $I\setminus\{a\}$), convergente, de limite a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite ℓ.

Démonstration . Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I (ou $I\setminus\{a\}$), convergeant vers a.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que,pour tout x de I (ou $I\setminus\{a\}$), si $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et que α est un réel strictement positif, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on a $|u_n - a| \leqslant \alpha$.
Pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0, on a alors $|f(u_n)-\ell| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(u_n)-\ell| \leqslant \varepsilon)$. Ainsi, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$. ❑

Le théorème précédent peut être utilisé de différentes façons. Son utilisation la plus immédiate est par exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$. Mais il peut être utilisé aussi pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite.

Exemple 1. Montrons que $\chi_{\mathbb{Q}}$, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, n'a pas de limite en tout réel x_0.
Soit x_0 un rationnel. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 + \dfrac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ puis $\chi_{\mathbb{Q}}\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x_0 et la suite $(\chi_{\mathbb{Q}}(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$ puis $\chi_{\mathbb{Q}}\left(x_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(x_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x_0 et la suite $(\chi_{\mathbb{Q}}(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

On a trouvé deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers x_0 telles que les suites $(\chi_{\mathbb{Q}}(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\chi_{\mathbb{Q}}(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers des limites différentes. Ceci montre que la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'a pas de limite en x_0.

La démarche est analogue si $x_0 \notin \mathbb{Q}$. ❑

Exemple 2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrons que la fonction f n'a pas de limite en 0. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites convergentes de limite 0.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = \sin(n\pi) = 0$. Donc, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite 0.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(v_n) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$. Donc, la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite 1.

On a trouvé deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers 0 telles que les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers des limites différentes. Donc, la fonction f n'a pas de limite en 0.

On aurait pu aussi considérer la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f(w_n) = (-1)^n$. Ainsi, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $(f(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Cette constatation montre également que la fonction f n'a pas de limite en 0. ❑

1.2 Limite finie en $\pm\infty$

Définition 7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a, +\infty[$, a réel ou égal à $-\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** $+\infty$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]-\infty, a[$, a réel ou égal à $+\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** $-\infty$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x \leqslant A \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon).$$

Les divers résultats sont identiques à ceux concernant une limite finie en un réel. Nous donnons ces résultats sans démonstration la plupart du temps :

Théorème 7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a, +\infty[$, a réel ou égal à $-\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $] - \infty, a[$, a réel ou égal à $+\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x < A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Ensuite, avec les notations précédentes,

Théorème 8 (unicité de la limite). Soient ℓ et ℓ' deux réels (resp. deux complexes).

Si $f(x)$ tend vers ℓ et ℓ' quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\ell = \ell'$.

Par suite, quand $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on peut maintenant écrire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$) ou plus simplement $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ (resp. $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$).

Théorème 9. Si f converge en $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors f est bornée au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) ou encore il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f est bornée sur $]A, +\infty[\cap I$ (resp. $] - \infty, A[\cap I$).

Théorème 10 (lien avec les limites de suites). Si $f(x)$ tend vers ℓ, réel ou complexe, quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration. Montrons le résultat quand $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I tendant vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, il existe un réel A tel que, pour tout x de I, si $x \geqslant A$, alors $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$.
Soit $n \geqslant n_0$. u_n est un réel de I vérifiant $u_n \geqslant A$. Mais alors, $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon)$. Donc, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

❏

1.3 Limite infinie en un réel

Définition 8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit a un réel qui est une extrémité de I (resp. soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, soit a un réel de I puis f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$).

On dit que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ **quand** x **tend vers** a, et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A)\ \text{(resp. } \forall x \in I \setminus \{a\},\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A)).$$

On dit que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ **quand** x **tend vers** a, et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) \leqslant A)\ \text{(resp. } \forall x \in I \setminus \{a\},\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A)).$$

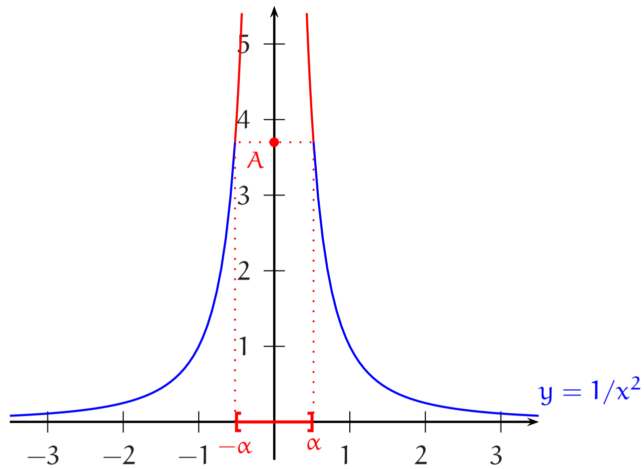
Exemple. Montrons, en revenant à la définition, que l'on a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Soit A un réel. Si $A \leqslant 0$, pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a $\dfrac{1}{x^2} \geqslant A$ et en particulier, il existe $\alpha > 0$ (par exemple $\alpha = 1$) tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, si $|x - 0| \leqslant \alpha$, alors $\dfrac{1}{x^2} \geqslant A$.
Supposons maintenant $A > 0$. Soit x un réel non nul.

$$\frac{1}{x^2} \geqslant A \Leftarrow x^2 \leqslant \frac{1}{A} \Leftarrow |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Le réel $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ est un réel strictement positif tel que, pour tout réel non nul x, si $|x-0| \leqslant \alpha$, alors $\dfrac{1}{x^2} \geqslant A$.

On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left(|x| \leqslant \alpha \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} \geqslant A\right)$. Donc, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.



❏

On a aussi la notion de limite à droite ou à gauche infinie en un réel. Avec des notations adaptées :

Définition 8 bis. On dit que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ **quand** x **tend vers** a **par valeurs supérieures**, et on écrit $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (0 \leqslant x - a \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A).$$

On dit que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ **quand** x **tend vers** a **par valeurs supérieures en restant différent de** a, et on écrit $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (0 < x - a \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A).$$

On dit que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ **quand** x **tend vers** a **par valeurs supérieures**, et on écrit $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (0 \leqslant x - a \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A).$$

On dit que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ **quand** x **tend vers** a **par valeurs supérieures en restant différent de** a, et on écrit $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (0 < x - a \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A).$$

Définition 8 ter. On dit que $f(x)$ **tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures**, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\leqslant a}} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (-\alpha \leqslant x - a \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant A).$$

On dit que $f(x)$ **tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures en restant différent de a**, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x< a}} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (-\alpha \leqslant x - a < 0 \Rightarrow f(x) \geqslant A).$$

On dit que $f(x)$ **tend vers $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures**, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\leqslant a}} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (-\alpha \leqslant x - a \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant A).$$

On dit que $f(x)$ **tend vers $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures en restant différent de a**, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x< a}} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (-\alpha \leqslant x - a < 0 \Rightarrow f(x) \leqslant A).$$

Ainsi, par exemple, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Les différents résultats des paragraphes précédents restent valables en adaptant : définitions pouvant être fournies avec des inégalités strictes, lien avec les limites de suites ...

1.4 Limite infinie en $\pm\infty$

Définition 9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a, +\infty[$, a réel ou égal à $-\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que $f(x)$ **tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$** et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A).$$

On dit que $f(x)$ **tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$** et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A).$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]-\infty, a[$, a réel ou égal à $+\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

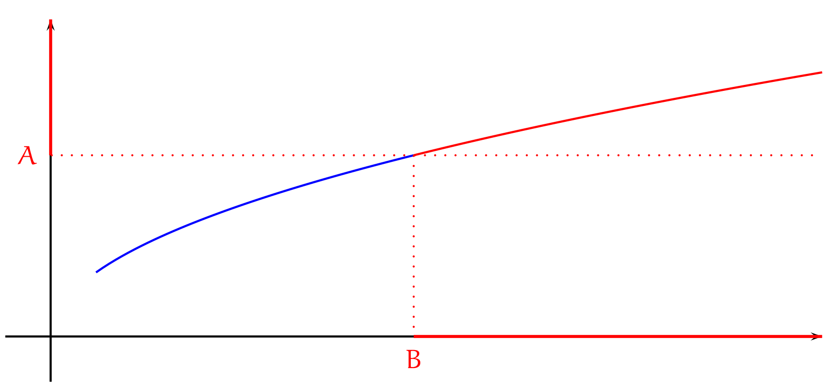
On dit que $f(x)$ **tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$** et on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A).$$

On dit que $f(x)$ **tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$** et on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x \leqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A).$$

Visualisons sur un graphique la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On se donne un réel A lu sur l'axe des ordonnées. On fournit un réel B sur l'axe des abscisses, en fonction du réel A, tel que, si $x \geqslant B$, alors $f(x) \geqslant A$.



On « résume » maintenant les différentes définitions dans un tableau.

• Soit f définie sur $D = I$ ou $I \setminus \{a\}$, a réel à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (0 < |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (0 \leqslant x - a \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (0 < x - a \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (-\alpha \leqslant x - a \leqslant 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (-\alpha \leqslant x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

• Soit f définie sur $D =]a, +\infty[$ ou $] - \infty, a[$, a réel, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit ℓ un réel (resp. un complexe).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}/\ \forall x \in D,\ (x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}/\ \forall x \in D,\ (x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

• Soit f définie sur $D = I$ ou $I \setminus \{a\}$, a réel à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (0 < |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (0 \leqslant x - a \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (0 < x - a \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (-\alpha \leqslant x - a \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (-\alpha \leqslant x - a < 0 \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (0 < |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (0 \leqslant x - a \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (0 < x - a \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (-\alpha \leqslant x - a \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant A)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in D,\ (-\alpha \leqslant x - a < 0 \Rightarrow f(x) \leqslant A)$.

• Soit f définie sur $D =]a, +\infty[$ ou $] - \infty, a[$, a réel, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in D,\ (x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in D,\ (x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A)$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in D,\ (x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in D,\ (x \leqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A)$.

C'est une compétence de base à acquérir rapidement, que de savoir fournir immédiatement la définition d'une limite donnée.

2 Opérations sur les limites

Ce qui suit est quasiment un copier-coller du paragraphe Opérations sur les limites du chapitre sur les suites.

2.1 Combinaisons linéaires

Théorème 11. a est un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$. ℓ et ℓ' sont deux réels (resp. deux complexes).

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}^2$), la fonction $\lambda f + \mu g$ a une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda\ell + \mu\ell' = \lambda \lim\limits_{x\to a} f(x) + \mu \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Démonstration .

• Cas où a réel. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout x de I, si $|x-a| \leqslant \alpha_1$, alors $|f(x)-\ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)}$ et il existe $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout x de I, si $|x-a| \leqslant \alpha_2$, alors $|g(x)-\ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)}$.

Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\}$. α est un réel strictement positif. Pour $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$. Alors, $|x-a| \leqslant \alpha_1$ et donc $|f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)}$ mais aussi $|x-a| \leqslant \alpha_2$ et donc $|g(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)}$. Par suite,

$$\begin{aligned}|(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda\ell + \mu\ell')| &= |\lambda(f(x)-\ell) + \mu(g(x)-\ell')| \\ &\leqslant |\lambda||f(x)-\ell| + |\mu||g(x)-\ell'| \leqslant |\lambda|\frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)} \\ &\leqslant (|\lambda|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)} + (|\mu|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

On a montré que : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\alpha > 0/ \forall x \in I$, $(|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda\ell + \mu\ell')| \leqslant \varepsilon)$. Donc, la fonction $\lambda f + \mu g$ a une limite en a et de plus, $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda\ell + \mu\ell'$.

• Cas où $a = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x de I, si $x \geqslant A_1$, alors $|f(x)-\ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)}$ et il existe $A_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x de I, si $x \geqslant A_2$, alors $|g(x)-\ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)}$.

Soit $A = \text{Max}\{A_1, A_2\}$. Comme précédemment, A est un réel tel que si x est un réel de I supérieur ou égal à A, alors

$$|(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda\ell + \mu\ell')| \leqslant |\lambda|\frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)} \leqslant \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}/ \forall x \in I$, $(x \geqslant A \Rightarrow |(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda\ell + \mu\ell')| \leqslant \varepsilon)$. Donc, la fonction $\lambda f + \mu g$ a une limite en $+\infty$ et de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda\ell + \mu\ell'$.

Le cas où $a = -\infty$ se traite de manière similaire.

❏

Une conséquence du théorème précédent est la possibilité d'analyser la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ en analysant ses parties réelle et imaginaire :

Théorème 12. a est un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$. f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1) f a une limite finie en a si et seulement si $\overline{f}$ a une limite finie en a et dans ce cas,

$$\lim_{x\to a} \overline{f(x)} = \overline{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

2) f a une limite finie en a si et seulement si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ont une limite finie en a et dans ce cas,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(\text{Re}(f))(x) + i\lim_{x\to a}(\text{Im}(f))(x).$$

Démonstration .

1) Supposons que f ait une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a. Puisque pour tout x de I, $\left|\overline{f(x)} - \overline{\ell}\right| = \left|\overline{f(x)-\ell}\right| = |f(x)-\ell|$, il est immédiat que $\lim\limits_{x\to a} \overline{f(x)} = \overline{\ell} = \overline{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

Réciproquement, si $\overline{f}$ a une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a, en appliquant ce qui précède à $\overline{f}$, $f = \overline{\overline{f}}$ a une limite en a puis $\lim\limits_{x\to a} \overline{f(x)} = \overline{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

2) Si f a une limite $\ell \in \mathbb{C}$, alors $\overline{f}$ a une limite en a qui est $\overline{\ell}$ puis, d'après le théorème 11, quand x tend vers a, $\text{Re}(f) = \dfrac{1}{2}\left(f + \overline{f}\right)$ tend vers $\dfrac{1}{2}\left(\ell + \overline{\ell}\right) = \text{Re}(\ell)$ et $\text{Im}(f) = \dfrac{1}{2i}\left(f - \overline{f}\right)$ tend vers $\dfrac{1}{2i}\left(\ell - \overline{\ell}\right) = \text{Im}(\ell)$.

Réciproquement, si quand x tend vers a, $\text{Re}(f)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\text{Im}(f)$ tend vers $\ell' \in \mathbb{R}$, alors $f = \text{Re}(f) + i\text{Im}(f)$ tend vers $\ell + i\ell'$.
❏

Théorème 13. a est réel ou infini. f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) a) Si, quand x tend vers a, $f(x)$ tend $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si g est bornée au voisinage de a, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
b) Si, quand x tend vers a, $f(x)$ tend $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $g(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2) Si, quand x tend vers a, $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration .

1) a) Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et que la fonction g soit bornée au voisinage de a. Montrons que $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a.

• Cas où a est réel. Il existe un réel positif M et un réel strictement positif α_1 tel que, pour tout x de I, si $|x - a| \leqslant \alpha_1$, alors $|g(x)| \leqslant M$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, il existe un réel strictement positif α_2 tel que, pour $x \in I$, si $|x - a| \leqslant \alpha_2$, alors $f(x) \geqslant A + M$.
Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\}$. α est un réel strictement positif.
Pour tout réel x de I tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, on a $|x - a| \leqslant \alpha_1$ et $|x - a| \leqslant \alpha_2$. Mais alors,

$$f(x) + g(x) \geqslant A + M - M = A.$$

On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) + g(x) \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$. La démonstration est analogue si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

• Cas où $a = +\infty$. Il existe un réel positif M et un réel B_1 tel que, pour tout x de I, si $x \geqslant B_1$, alors $|g(x)| \leqslant M$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel B_2 tel que, pour $x \in I$, si $x \geqslant B_2$, $f(x) \geqslant A + M$. Soit $B = \text{Max}\{A_1, A_2\}$.
Pour tout réel x de I tel que $x \geqslant B$, on a $x \geqslant B_1$ et $x \geqslant B_2$. Mais alors,

$$f(x) + g(x) \geqslant A + M - M = A.$$

On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x \geqslant B \Rightarrow f(x) + g(x) \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$. La démonstration est analogue si $a = -\infty$ ou si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

b) Si quand x tend vers a, $g(x)$ tend vers un réel ℓ, g est en particulier bornée au voisinage de a. Le résultat se déduit alors de a).

2) Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

• Cas où a est réel. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x - a| \leqslant \alpha_1$, alors $f(x) \geqslant \dfrac{A}{2}$ et il existe $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x - a| \leqslant \alpha_2$, alors $g(x) \geqslant \dfrac{A}{2}$

Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\}$. α est un réel strictement positif. Pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, on a

$$f(x) + g(x) \geqslant \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A.$$

On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) + g(x) \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$. La démonstration est analogue si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = -\infty$.

• Cas où $a = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $B_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x \geqslant B_1$, alors $f(x) \geqslant \dfrac{A}{2}$ et il existe $B_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x \geqslant B_2$, alors $g(x) \geqslant \dfrac{A}{2}$

Soit $B = \text{Max}\{A_1, A_2\}$. Pour tout $x \in I$ tel que $x \geqslant B$, on a $f(x) + g(x) \geqslant \dfrac{A}{2} + \dfrac{A}{2} = A$.
On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x \geqslant B \Rightarrow f(x) + g(x) \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$. La démonstration est analogue si $a = -\infty$ ou si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = -\infty$.
❏

Sinon, on a immédiatement

Théorème 14. Soient f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et λ un réel.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda < 0 \\ 0 \text{ si } \lambda = 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda > 0 \end{cases}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda < 0 \\ 0 \text{ si } \lambda = 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda > 0 \end{cases}$.

On peut résumer la plupart des résultats précédents dans le tableau suivant :

$f(x)$ tend vers	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$ tend vers	ℓ'	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f(x)+g(x)$ tend vers	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Le tableau ci-dessus comporte un ?. Cela signifie que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, tout est possible concernant $f(x)+g(x)$. $(+\infty)+(-\infty)$ est une **forme indéterminée** qui sera analysée plus loin.

2.2 Produits

Théorème 15. a est réel ou infini. f et g sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). ℓ et ℓ' sont deux nombres réels (resp. complexes).

Si, quand x tend vers a, $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers ℓ et ℓ' respectivement, **alors** $f(x)g(x)$ tend vers $\ell\ell'$ quand x tend vers a.

Démonstration . Soit $\varepsilon > 0$. $g(x)$ tend vers ℓ' quand x tend vers a et en particulier, la fonction g est bornée au voisinage de a.

• Cas où a est réel. Il existe un réel positif M et un réel strictement positif α_1 tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha_1$ alors $|g(x)| \leqslant M$.

Il existe un réel strictement positif α_2 tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha_2$, alors $|f(x)-\ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$ et il existe un réel strictement positif α_3 tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha_3$, $|g(x)-\ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}$.

Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} > 0$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a

$$\begin{aligned}\left|f(x)g(x) - \ell\ell'\right| &= \left|f(x)g(x) - \ell g(x) + \ell g(x) - \ell\ell'\right| = \left|(f(x)-\ell)\, g(x) + \ell\left(g(x)-\ell'\right)\right| \\ &\leqslant |g(x)|\,|f(x)-\ell| + |\ell'|\left|g(x)-\ell'\right| \leqslant M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |\ell|\frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} \\ &\leqslant (M+1)\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + (|\ell|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \ \forall x \in I$, $(|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon)$ et donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \ell\ell'$.

• Cas où $a = +\infty$. Il existe un réel positif M et un réel A_1 tel que, pour tout $x \in I$, si $x \geqslant A_1$ alors $|g(x)| \leqslant M$.

Il existe un réel A_2 tel que, pour tout $x \in I$, si $x \geqslant A_2$, alors $|f(x)-\ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$ et il existe un réel A_3 tel que, pour tout $x \in I$, si $x \geqslant A_3$, $|g(x)-\ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}$.

Soit $A = \text{Max}\{A_1, A_2, A_3\}$. Pour tout $x \in I$ tel que $x \geqslant A$, on a

$$\left|f(x)g(x) - \ell\ell'\right| \leqslant |g(x)|\,|f(x)-\ell| + |\ell'|\left|g(x)-\ell'\right| \leqslant M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |\ell|\frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I$, $(x \geqslant A \Rightarrow |f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon)$ et donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)g(x) = \ell\ell'$. Le cas où $a = -\infty$ se traite de manière analogue.

❏

Théorème 16. a est réel ou infini. f et g sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

1) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $g(x)$ tend vers un réel non nul ℓ quand x tend vers a, **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = \mathrm{sgn}(\ell)\times(+\infty)$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $g(x)$ tend vers un réel non nul ℓ quand x tend vers a, **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = \mathrm{sgn}(\ell)\times(-\infty)$.

2) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = +\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = -\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = +\infty$.

Démonstration .

1) Supposons par exemple que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell > 0$.

• Cas où a est réel. Le réel $\dfrac{\ell}{2}$ est strictement positif et donc il existe un réel strictement positif α_1 tel que, pour tout x de I tel que $|x-a| \leqslant \alpha_1$, $|g(x)-\ell| \leqslant \dfrac{\ell}{2}$. Pour tout x de I tel que $|x-a| \leqslant \alpha_1$, on a $g(x)-\ell \geqslant -\dfrac{\ell}{2}$ et donc $g(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2} > 0$.

Soit $A \in [0,+\infty[$. Il existe un réel strictement positif α_2 tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha_2$, $f(x) \geqslant \dfrac{2A}{\ell} \geqslant 0$. Soit $\alpha = \mathrm{Min}\{\alpha_1,\alpha_2\} > 0$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a

$$f(x)\times g(x) \geqslant \frac{2A}{\ell}\times\frac{\ell}{2} = A.$$

On a montré que $\forall A \in [0,+\infty[,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x)g(x) \geqslant A)$.
Mais alors, $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x)g(x) \geqslant A)$ car si A est un réel strictement négatif, un réel strictement positif α tel que pour $x \in I\cap[a-\alpha, a+\alpha]$, on a $f(x)g(x) \geqslant 0$, est aussi réel strictement positif α tel que pour $x \in I\cap[a-\alpha, a+\alpha]$, $f(x)g(x) \geqslant A$. Donc, $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

• Les cas où $a = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell < 0$ se traitent de manière analogue.

2) Supposons par exemple que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

• Cas où a est réel. Comme précédemment, on se contente de montrer que $\forall A \in [0,+\infty[,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x)g(x) \geqslant A)$.

Soit $A \in [0,+\infty[$. Il existe un réel strictement positif α_1 tel que, pour $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha_1$, $f(x) \geqslant \sqrt{A}$ et il existe un réel strictement positif α_2 tel que, pour $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha_2$, $g(x) \geqslant \sqrt{A}$. Soit $\alpha = \mathrm{Min}\{\alpha_1,\alpha_2\} > 0$. Pour $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a

$$f(x)\times g(x) \geqslant \sqrt{A}\times\sqrt{A} = A.$$

On a montré que $\forall A \in [0,+\infty[,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x)g(x) \geqslant A)$ et donc, $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

• Les autres cas se traitent de manière analogue.

❏

On peut résumer la plupart des résultats précédents dans le tableau suivant :

$f(x)$ tend vers	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$g(x)$ tend vers	ℓ'	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$f(x)\times g(x)$ tend vers	$\ell\ell'$	$\mathrm{sgn}(\ell)\times+\infty$	$\mathrm{sgn}(\ell)\times-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Le tableau ci-dessus comporte un ?. Cela signifie que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, tout est possible concernant $f(x)\times g(x)$. $\infty\times 0$ est une **forme indéterminée** qui sera analysée plus loin.

2.3 Quotients

Théorème 17. a est réel ou infini. f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). ℓ est un nombre réel (resp. complexe) non nul.

Si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, **alors** la fonction f ne s'annule pas au voisinage de a et $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $\dfrac{1}{\ell}$ quand x tend vers a.

Démonstration . On fait la démonstration dans le cas où a est réel. Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$. Le réel $\dfrac{|\ell|}{2}$ est strictement positif et donc, il existe un réel strictement positif α_1 tel que pour $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha_1$, $|f(x)-\ell| \leqslant \dfrac{|\ell|}{2}$. Pour $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha_2$, on a

$$|\ell| - |f(x)| \leqslant ||\ell| - |f(x)|| \leqslant |\ell - f(x)| \leqslant \frac{|\ell|}{2}$$

et donc $|f(x)| \geqslant |\ell| - \dfrac{|\ell|}{2} = \dfrac{|\ell|}{2}$. En particulier, $|f(x)| > 0$ puis $f(x) \neq 0$. La fonction $\dfrac{1}{f}$ est bien définie sur $[a-\alpha_1, a+\alpha_1] \cap I$.
Pour $x \in [a-\alpha_1, a+\alpha_1] \cap I$, on a

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|f(x)-\ell|}{|f(x)|\,|\ell|} \leqslant \frac{|f(x)-\ell|}{\dfrac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \frac{2}{|\ell|^2}\,|f(x)-\ell|\,.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Le réel $\dfrac{|\ell|^2}{2}\varepsilon$ est un réel strictement positif. Donc, il existe un réel strictement positif α_2 tel que, pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha_2$, $|f(x)-\ell| \leqslant \dfrac{|\ell|^2}{2}\varepsilon$. Soit $\alpha = \mathrm{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{2}{|\ell|^2}\,|f(x)-\ell| \leqslant \frac{2}{|\ell|^2} \times \frac{|\ell|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ \left(|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Donc, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$. ❑

Théorème 18. a est réel ou infini. f et g sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). ℓ et ℓ' sont deux réels (resp. complexes), ℓ' étant non nul.

Si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a et $g(x)$ tend vers ℓ' quand x tend vers a, **alors** la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$ quand x tend vers a.

Démonstration . Puisque $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$, il suffit d'appliquer les théorèmes 15 et 17.

❑

Théorème 19. a est réel ou infini. f est une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs réelles.

Si $f(x)$ tend vers 0 et est strictement positive au voisinage de a, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Si $f(x)$ tend vers 0 et est strictement négative au voisinage de a, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Démonstration . On fait la démonstration dans le cas où a est réel.

Supposons que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a et que la fonction f converge vers 0 et soit strictement positive au voisinage de a. Il existe un réel strictement positif α_1 tel que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ tel $|x-a| \leqslant \alpha_1$, on a $f(x) > 0$.
Soit A un réel strictement positif. Puisque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, il existe un réel strictement positif α_2 tel que, pour $x \in I \setminus \{a\}$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{A}$.
Soit $\alpha = \mathrm{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$. Pour $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, on a $0 < f(x) = |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{A}$ et donc $\dfrac{1}{f(x)} \geqslant A$.

On a montré que : $\forall A \in]0,+\infty[,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I \setminus \{a\},\ \left(|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \geqslant A\right)$ et donc aussi que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I \setminus \{a\},\ \left(|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \geqslant A\right)$. Par suite, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.
La démonstration est analogue si la fonction f est strictement négative au voisinage de a.

❑

Théorème 20. a est réel ou infini. f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, **alors** la fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Démonstration . On fait la démonstration dans le cas où a est réel et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, $f(x) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Pour $x \in [a-\alpha, a+\alpha] \cap I$, on a $f(x) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ et donc $0 < \dfrac{1}{f(x)} \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ \left(|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Par suite, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

❑

On peut résumer les théorèmes 19 et 20 avec les égalités :

$$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

Sinon, en combinant les résultats sur les produits et les inverses, on obtient le tableau suivant :

$f(x)$ tend vers	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$g(x)$ tend vers	$\ell' \neq 0$	0^+	0^+	0^-	0^-	$\ell > 0$	$\ell < 0$
$f(x)/g(x)$ tend vers	ℓ/ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$f(x)$ tend vers	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
$g(x)$ tend vers	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$\pm\infty$
$f(x)/g(x)$ tend vers	$-\infty$	$+\infty$	?	?

Le tableau ci-dessus comporte deux ?. Cela signifie que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ou bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, tout est possible concernant $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
$\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ sont des **formes indéterminées** qui seront analysées au paragraphe suivant.

2.4 Formes indéterminées

On récupère les différentes formes indéterminées des paragraphes précédents et on en rajoute une. On obtient les cinq formes indéterminées des classes préparatoires :

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \vdots \quad \infty \times 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \quad \vdots \quad 1^{\infty}$$

Puisque $\dfrac{1}{\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = \infty$, les trois formes indéterminées $\infty \times 0$, $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$, sont une seule et même forme indéterminée. On donne différents exemples montrant que dans chacun des cas ci-dessus, tout est possible.

Pour $(+\infty) + (-\infty)$,

- $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = -x^2$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$.
- $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 - x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$.
- $f(x) = x^2 + 1$ et $v_n = -x^2$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = 1$.
- $f(x) = x + \sin(x)$ et $v_n = -x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (car pour tout réel x, $f(x) \geqslant x - 1$), $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et la fonction

$f + g\ :\ x \mapsto \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (car par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers $+\infty$ mais la suite $(\sin(u_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Pour $0 \times \infty$,

- $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$.
- $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$.
- $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 1$.

- $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (car $|g(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$) et $f(x)g(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Pour 1^∞,

- $f(x) = 1(x) - \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ puis

$$f(x)^{g(x)} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\left(x^2\right)} = e^{-x\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = 0$.

- $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ puis

$$f(x)^{g(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\left(x^2\right)} = e^{x\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} n\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = +\infty$.

- $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ puis

$$f(x)^{g(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = e$.

On travaillera dans le chapitre suivant (« Comparaison des fonctions en un point ») l'aspect technique du calcul des limites et en particulier on apprendra différentes manières de lever des indéterminations.

2.5 Le théorème de composition des limites

Théorème 21. a est réel ou infini, b est réel ou infini, ℓ est réel (resp. complexe) ou infini.

Si f est définie sur I à valeurs dans le domaine de définition J de g et $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a et si $g(y)$ tend vers ℓ quand y tend vers b, alors $g \circ f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

Démonstration . On analyse deux cas.

• Cas a et b réels et ℓ complexe. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout y de J, si $|y - b| \leqslant \beta$, alors $|g(y) - \ell| \leqslant \varepsilon$ puis il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x de I, si $|x - a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x) - b| \leqslant \beta$.
Pour $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, on a $|f(x) - b| \leqslant \beta$ puis $|g(f(x)) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - \ell| \leqslant \varepsilon)$. Donc, $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = \ell$.

• Cas $a = +\infty$, b réel et $\ell = -\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout y de J, si $|y - b| \leqslant \alpha$, alors $g(y) \leqslant A$. Puis il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x de I, si $x \geqslant B$, alors $|f(x) - b| \leqslant \alpha$.
Pour $x \in I$ tel que $x \geqslant B$, on a $|f(x) - b| \leqslant \alpha$ puis $g(f(x)) \leqslant A$.

On a montré que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (x \leqslant B \Rightarrow g(f(x)) \leqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} g \circ f(x) = -\infty$.

❏

Ainsi par exemple, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \exp\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{\sqrt{1+X}} = \lim\limits_{Y\to+\infty} e^{Y} = +\infty$.

Le théorème de composition des limites a un aspect naturel et intuitif et pourtant, si nous cherchions à énoncer des variantes de ce théorème avec par exemple la limite quand x tend vers a en restant différent de a ($\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$), on se retrouverait face à des difficultés insoupçonnées : le théorème deviendrait faux. Dans le théorème 21, la limite considérée est $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et pas $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$.

Considérons par exemple la fonction $f\ :\ x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ puis la fonction $g\ :\ y \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } y \neq 0 \\ 1 \text{ si } y = 0 \end{cases}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$ (car pour tout réel non nul x, $|f(x)| \leqslant |x|$) puis $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} g(y) = 0$.

D'autre part, pour tout réel x, $g\circ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = \dfrac{1}{n\pi} \text{ où } n \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$. Soit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites convergentes de limite 0 telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} g\circ f(u_n) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} g\circ f(v_n)$. Ceci montre que la fonction $g\circ f$ n'a pas de limite en 0 bien que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} g(y)$ existent dans $\mathbb{R}$!

3 Limites et inégalités

3.1 Passage à la limite dans des inégalités

Théorème 22. a est réel ou infini. f et g sont deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si les deux fonctions convergent en a et si pour tout x au voisinage de a (c'est-à-dire pour x appartenant à un ensemble de la forme $[a-\alpha, a+\alpha]\cap I$ si a est réel, de la forme $[A, +\infty[\cap I$ si $a = +\infty$, de la forme $]-\infty, A]\cap I$ si $a = -\infty$), on a $f(x) \leqslant g(x)$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas où a est réel. Posons $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\ell' = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel strictement positif α_1 tel que pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha_1$, on a $f(x) \leqslant g(x)$. Il existe un réel strictement positif α_2 tel que pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha_2$, alors $|f(x)-\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (d'après le théorème 2). Il existe un réel strictement positif α_3 tel que pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha_3$, alors $|g(x)-\ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} > 0$. Soit $x_0 \in I$ tel que $|x_0 - a| \leqslant \alpha$. On a

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) \leqslant g(x_0) < \ell' + \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\ell' - \ell > -\varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\ell' - \ell > -\varepsilon$. $\ell' - \ell$ est un réel strictement plus grand que n'importe quel réel strictement négatif et en particulier différent de n'importe quel réel strictement négatif. Donc, $\ell' - \ell \in [0, +\infty[$ ou encore $\ell \leqslant \ell'$.

❑

Le théorème précédent dit que les inégalités larges sont conservées par passage à la limite. Attention, **les inégalités strictes ne sont pas conservées pas passage à la limite** ou encore, si les fonctions f et g sont convergent en a,

$$(\exists \alpha > 0/\ \forall x \in I/\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) < g(x)) \not\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x).$$

Par exemple, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Par contre, si les fonctions f et g convergent en le réel a, on a bien sûr

$$(\exists \alpha > 0/\ \forall x \in I/\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) < g(x)) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

On a un résultat analogue si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Théorème 23. a est réel ou infini. f et g sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant en a vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire ayant en a une limite réelle ou une limite égale à $+\infty$ ou une limite égale à $-\infty$).

1) Si $\lim_{a} f > 0$, **alors** f est strictement positive au voisinage de a.

2) Si $\lim_{a} f < \lim_{a} g$, **alors** f est strictement inférieure à g au voisinage de a.

Démonstration . On fait la démonstration dans le cas où a est réel. Posons $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$.

1) • Cas où $\ell \in]0, +\infty[$. Le réel $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$ est strictement positif. Donc, il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout $x \in I$, si $|x - a| \leqslant \alpha$, alors $|f(x) - \ell| \leqslant \dfrac{\ell}{2}$. Pour $x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I$, on a $f(x) - \ell \geqslant -\dfrac{\ell}{2}$ et donc

$$f(x) \geqslant \frac{\ell}{2} > 0.$$

• Cas où $\ell = +\infty$. Il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $f(x) \geqslant 1$. Pour $x \in [a-\alpha, a+\alpha] \cap I$, on a $f(x) > 0$.

2) On applique le 1) à la fonction $g - f$.

❑

3.2 Obtention de limites grâce à des inégalités

Dans ce paragraphe, contrairement au paragraphe précédent, l'existence d'une limite ne fait pas partie des hypothèses mais fait partie de la conclusion. Tous les théorèmes qui suivent permettent d'abord de conclure à l'existence d'une limite, réelle, complexe ou infinie.

Comme dans les paragraphes précédent, l'expression « au voisinage de a » signifie : pour tout x appartenant à un ensemble de la forme $[a - \alpha, a + \alpha] \cap I$, $\alpha > 0$, dans le cas où a est réel ou, pour tout x appartenant à un ensemble de la forme $]A, +\infty[\cap I$ ou $]-\infty, A[\cap I$, A réel, dans le cas où a est infini.

Théorème 24 (théorème des gendarmes). a est réel ou infini. f, g et h sont trois fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout x au voisinage de a, on a $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.
On suppose de plus que les fonctions g et h (les gendarmes) convergent en a et ont une même limite réelle ℓ.

Alors, f converge en a et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Démonstration . On fait la démonstration dans le cas où a est réel. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un réel strictement positif α_1 tel que, pour tout réel x de $[a - \alpha_1, a + \alpha_1] \cap I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.
Il existe un réel strictement positif α_2 tel que, pour tout réel x de $[a - \alpha_2, a + \alpha_2] \cap I$, $|g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Il existe un réel strictement positif α_3 tel que, pour tout réel x de $[a - \alpha_3, a + \alpha_3] \cap I$, $|h(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\alpha = \mathrm{Min}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} > 0$. Pour $x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I$, on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$

et donc $-\varepsilon \leqslant f(x) - \ell \leqslant \varepsilon$ ou encore $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 /\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$ et donc (f converge en a et) $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

❑

Une conséquence immédiate du théorème des gendarmes est :

Théorème 25. a est réel ou infini. f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ et g est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. ℓ est un nombre complexe.

On suppose que pour tout x au voisinage de a, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

Alors, f converge en a et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple 1. Pour $x \neq 0$, posons $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0, ce qui empêche d'analyser l'existence et la valeur de la limite de f en 0 à partir de théorèmes généraux du paragraphe « Opérations sur les limites ».

Pour tout réel $x \neq 0$, $|f(x) - 0| = |f(x)| = |x| \times \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$. Puisque $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Notons qu'il est possible qu'un produit $g \times h$ ait une limite alors qu'au moins une des deux fonctions g ou h n'a pas de limite.

Exemple 2. Pour $x \neq 0$, posons $f(x) = \frac{e^{ix}}{x}$. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout réel $x > 0$, $|f(x)| = \frac{|e^{ix}|}{x} = \frac{1}{x}$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Théorème 26. a est réel ou infini. f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. ℓ est un nombre complexe.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, **alors** $|f|$ converge en a et $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$.

Démonstration . Pour tout x de I, $||f(x)l - |\ell|| \leqslant |f(x) - \ell|$. Puisque $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$, le théorème 25 permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$.

❏

Théorème 27. a est réel ou infini. f et g sont des fonctions à valeurs réelles telles que pour tout x au voisinage de a, on a $f(x) \leqslant g(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, **alors** $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, **alors** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Démonstration . On fait la démonstration dans le cas où a est réel.

• Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et montrons que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$. Soit A un réel.
Il existe un réel strictement positif α_1 tel que, pour tout $x \in [a - \alpha_1, a + \alpha_1| \cap I$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.
Il existe un réel strictement positif α_2 tel que, pour tout $x \in [a - \alpha_2, a + \alpha_2| \cap I$, on a $f(x) \geqslant A$.

Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$. Pour tout réel x de $[a - \alpha, a + \alpha] \cap I$, on a

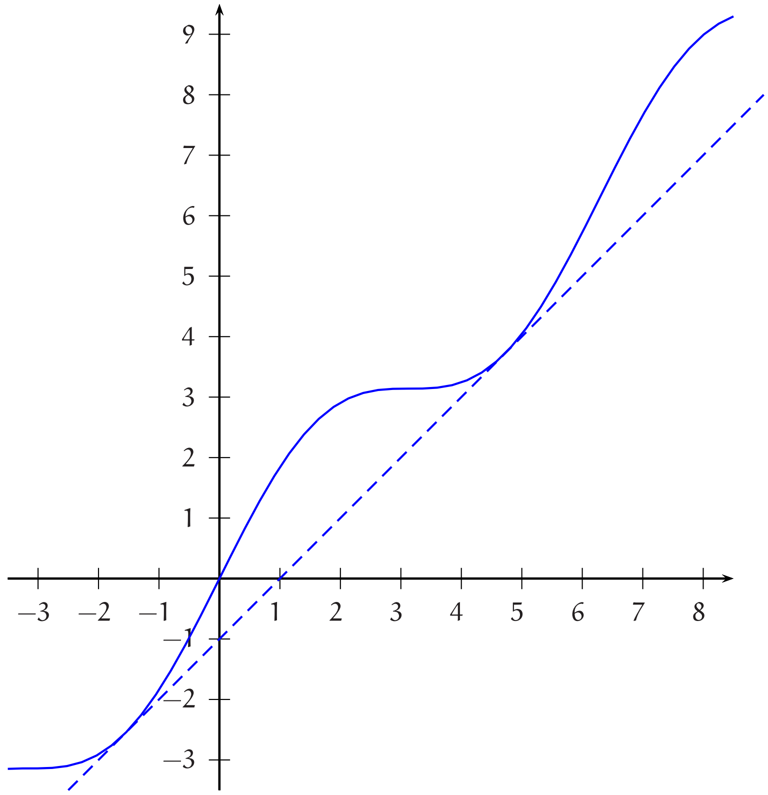
$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant A.$$

On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0 / \ \forall x \in I,\ (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow g(x) \geqslant A)$ et donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

• Supposons que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ et montrons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$. Pour tout x de I au voisinage de a, on a $f(x) \leqslant g(x)$ et donc $-g(x) \leqslant -f(x)$. De plus, $\lim\limits_{x \to a}(-g(x)) = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x \to a}(-f(x)) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

❏

Exemple. Pour tout réel x, posons $f(x) = x + \sin x$. La fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$ ce qui empêche d'analyser l'existence et la valeur de la limite de f en $+\infty$ à partir de théorèmes généraux sur « Opérations et limites ». Par contre, pour tout réel x, $f(x) \geqslant x - 1$ et de plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Voici les graphes des fonctions $x \mapsto x + \sin x$ et $x \mapsto x - 1$.



3.3 Limites et fonctions monotones

Dans le théorème qui suit, si x_0 est un réel, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ est plus simplement notée $f\left(x_0^-\right)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ est plus simplement notée $f\left(x_0^+\right)$.

Théorème 28 (théorème de la limite monotone). Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, a réel ou égal à $-\infty$, b réel ou égal à $+\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est croissante sur I.

1) a) Pour tout réel x_0 de I, $f\left(x_0^-\right)$ et $f\left(x_0^+\right)$ existent dans $\mathbb{R}$ et de plus

$$f\left(x_0^-\right) = \mathrm{Sup}\{f(x),\ x \in I,\ x < x_0\} \text{ et } f\left(x_0^+\right) = \mathrm{Inf}\{f(x),\ x \in I,\ x > x_0\}.$$

b) Pour tout réel x_0 de I, $f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0) \leqslant f\left(x_0^+\right)$.

2) Pour tout $(x_0, x_1) \in I^2$ tel que $x_0 < x_1$, on a

$$f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0) \leqslant f\left(x_0^+\right) \leqslant f\left(x_1^-\right) \leqslant f(x_1) \leqslant f\left(x_1^+\right).$$

3) f a une limite quand x tend vers a par valeurs supérieures qui est soit un réel, soit $-\infty$, et f a une limite quand x tend vers b par valeurs inférieures qui est soit un réel, soit $+\infty$.

Démonstration .

1) Soit $x_0 \in I$. Puisque I est un intervalle ouvert, les ensembles $\mathcal{E}_-(x_0) = \{f(x),\ x \in I,\ x < x_0\}$ et $\mathcal{E}_+(x_0) = \{f(x),\ x \in I,\ x > x_0\}$ sont des parties non vides de $\mathbb{R}$.

Puisque f est croissante sur I, pour tout x de I tel que $x < x_0$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$. Ainsi, $\mathcal{E}_-(x_0)$ est une partie non vide et majorée (par $f(x_0)$) et donc $\mathcal{E}_-(x_0)$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ que l'on note s. Montrons alors que $f\left(x_0^-\right)$ existe dans $\mathbb{R}$ et que $f\left(x_0^-\right) = s$.
Soit $\varepsilon > 0$.Par définition de s, il existe $y_0 \in I$ tel que $y_0 < x_0$ et $s - \varepsilon < f(y_0) \leqslant s$. Soit $\alpha = x_0 - y_0 > 0$. Pour $x \in I$ tel que $-\alpha \leqslant x - x_0 < 0$, on a $y_0 < x < x_0$ et donc, puisque f est croissante sur I, $f(y_0) \leqslant f(x)$. Mais alors, $s - \varepsilon \leqslant f(x)$ car $f(y_0) \geqslant s - \varepsilon$ et aussi $f(x) \leqslant s$ par définition de s. On en déduit encore que $|f(x) - s| \leqslant \varepsilon$.
On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 /\ \forall x \in I,\ (-\alpha \leqslant x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - s| \leqslant \varepsilon)$. Donc, $f\left(x_0^-\right)$ existe dans $\mathbb{R}$ et que $f\left(x_0^-\right) = s$.

De plus, f étant croissante sur I, $f(x_0)$ est un majorant de $\mathcal{E}_-(x_0)$ et d'autre part, s est le plus petit des majorants de $\mathcal{E}_-(x_0)$. Donc, $s \leqslant f(x_0)$ ou encore $f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0)$.

De même, en considérant la borne inférieure de $\mathcal{E}_+(x_0)$, $f\left(x_0^+\right)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $f\left(x_0^+\right) \geqslant f(x_0)$.

2) Soit $(x_0, x_1) \in I^2$ tel que $x_0 < x_1$. Soit x_2 un réel tel que $x_0 < x_2 < x_1$. $f(x_2)$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{E}_+(x_0)$ et donc

$f(x_2) \geqslant f\left(x_0^+\right)$ (car $f\left(x_0^+\right)$ est un minorant de l'ensemble $\mathcal{E}_+(x_0)$ en tant que borne inférieure de cet ensemble). De même, $f(x_2)$ est un élément de $\mathcal{E}_-(x_1)$ et donc $f(x_2) \leqslant f\left(x_1^-\right)$. En résumé, $f\left(x_0^+\right) \leqslant f(x_2) \leqslant f\left(x_1^-\right)$. On a donc montré que

$$f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0) \leqslant f\left(x_0^+\right) \leqslant f\left(x_1^-\right) \leqslant f(x_1) \leqslant f\left(x_1^+\right).$$

3) Si l'ensemble $\mathcal{E}_-(b) = \{f(x),\ x \in I\}$ est majoré, il admet une borne supérieure s réelle et comme précédemment, on montre que f a une limite à gauche en b, à savoir s et en particulier que cette limite est réelle.

Supposons maintenant l'ensemble $\mathcal{E}_-(b)$ non majoré et montrons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b par valeurs inférieures. On fait cette démonstration dans le cas où b est réel, la démonstration étant similaire dans le cas où $b = +\infty$.

Soit A un réel. A n'est pas un majorant de $\mathcal{E}_-(b)$. Donc, il existe $x_0 \in I =]a, b[$ tel que $f(x_0) > A$ et en particulier, $f(x_0) \geqslant A$. Soit $\alpha = b - x_0 > 0$. Pour tout x de I tel que $-\alpha \leqslant x - b < 0$, on a $b > x \geqslant x_0$ et donc, f étant croissante sur I, $f(x) \leqslant f(x_0) \geqslant A$. On a montré que : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (-\alpha \leqslant b - x < 0 \Rightarrow f(x) \geqslant A)$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.

La démarche est analogue en a.

❑

⇨ **Commentaire**.

◇ *Le théorème précédent dit qu'une fonction croissante sur un intervalle a une limite à gauche et une limite à droite réelle en tout point intérieur à cet intervalle.*

◇ *Le résultat est analogue si f est décroissante sur I (en appliquant la démonstration précédente à la fonction $-f$) en inversant les différentes inégalités.*

4 Continuité en un point

4.1 Définition de la continuité en un point

Définition 10. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et longueur non nulle. Soit $x_0 \in I$.

La fonction f est **continue en** x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

Un résultat immédiat est

Théorème 29. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit $x_0 \in I$.

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } x_0 &\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \text{ et } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0). \end{aligned}$$

Le théorème 12 fournit :

Théorème 30. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

- f est continue en x_0 si et seulement si $\overline{f}$ est continue en x_0.
- f est continue en x_0 si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en x_0.

Le théorème 26 fournit :

Théorème 31. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

Si f est continue en x_0, **alors** $|f|$ est continue en x_0.

Le théorème 6 fournit :

Théorème 32. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit $x_0 \in I$.

Si f est continue en x_0, alors pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

4.2 Continuité à droite, continuité à gauche

Définition 11. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

• Soit x_0 un point de I qui n'est pas la borne gauche de I.

f est **continue à gauche en** x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (-\alpha \leqslant x - x_0 \leqslant 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

• Soit x_0 un point de I qui n'est pas la borne droite de I.

f est **continue à droite en** x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (0 \leqslant x - x_0 \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

Un résultat immédiat est

Théorème 33. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

• Soit x_0 un point de I qui n'est pas la borne gauche de I.

$$\begin{aligned} f \text{ est continue à gauche en } x_0 &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\leqslant x_0}} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x< x_0}} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \text{ et } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x< x_0}} f(x) = f(x_0). \end{aligned}$$

• Soit x_0 un point de I qui n'est pas la borne droite de I.

$$\begin{aligned} f \text{ est continue à droite en } x_0 &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\geqslant x_0}} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x> x_0}} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \text{ et } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x> x_0}} f(x) = f(x_0). \end{aligned}$$

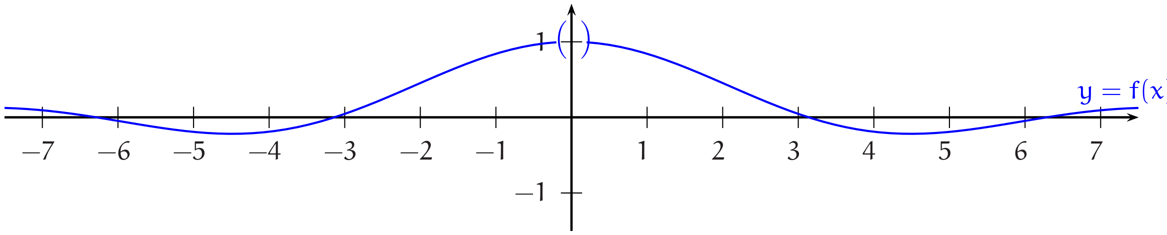
et aussi

Théorème 34. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit x_0 un point de I qui n'est pas une borne de I.

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } x_0 &\Leftrightarrow f \text{ est continue à gauche et à droite en } x_0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\leqslant x_0}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\geqslant x_0}} f(x) \text{ existent dans } \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x< x_0}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x> x_0}} f(x) \text{ existent dans } \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \text{ et } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x< x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x> x_0}} f(x) = f(x_0). \end{aligned}$$

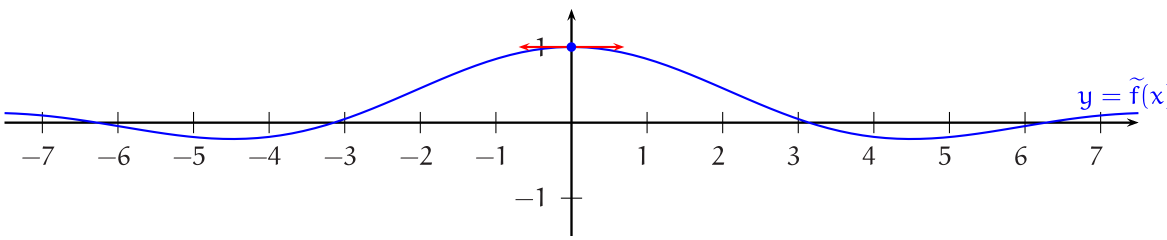
4.3 Prolongement par continuité en un point

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Voici son graphe :



La fonction f n'est pas définie en 0 mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$. Le problème est alors de savoir comment démarre la courbe représentative de f en 0 ou encore quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0. On se heurte à un problème : le point d'abscisse 0 n'existe pas. Dit autrement, on ne peut pas étudier la limite du taux $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ car $f(0)$ n'existe pas.

Pour pallier à cette difficulté, nous allons considérer une autre, définie en 0, en **prolongeant** la fonction f dans la continuité. Pour cela, pour tout réel x, on pose $\widetilde{f}(x) = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0\\ 1 \text{ si } x = 0\end{array}\right.$. La fonction $\widetilde{f}$ a trois propriétés : 1) $\widetilde{f}$ est définie en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$, 2) $\widetilde{f}/\mathbb{R}^* = f$, 3) $\widetilde{f}$ est continue en 0. $\widetilde{f}$ s'appelle le **prolongement par continuité** de la fonction f en 0. On peut maintenant, si on le désire, étudier par exemple $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(x)}{x}-1}{x}$. On montrera dans les chapitres ultérieurs que cette limite est nulle. Voici le graphe de la fonction $\widetilde{f}$.



De manière générale, on a immédiatement :

Théorème 35 (et définition 12). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle. Soit x_0 un **réel** élément de I. Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

Si f a une limite réelle (resp. complexe) ℓ quand x tend vers x_0, alors il existe une et une seule fonction $\widetilde{f}$ vérifiant :

- $\widetilde{f}$ est définie sur I,
- $\widetilde{f}_{/I\setminus\{x_0\}} = f$,
- $\widetilde{f}$ est continue en x_0.

$\widetilde{f}$ est définie sur I par : $\forall x \in I$, $\widetilde{f}(x) = \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \in I\setminus\{x_0\}\\ \ell \text{ si } x = x_0\end{array}\right.$.

$\widetilde{f}$ s'appelle le **prolongement par continuité** de la fonction f en x_0.

Réciproquement, si f admet un prolongement par continuité en x_0, alors f admet une limite réelle (resp. complexe) en x_0.

On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si et seulement si f admet un prolongement par continuité en x_0. Ainsi, une fonction est prolongeable par continuité en un point x_0 où elle n'est pas définie si et seulement si cette fonction admet une limite finie en x_0.

Dans la pratique, il y a deux manières de poser une question sur le sujet :

Exercice 3. Pour x réel non nul, on pose $f(x) = \dfrac{\text{Arcsin}(x)}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Solution 3. On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Arcsin}(x)}{x} = 1$. Donc, f admet une limite réelle en 0 égale à 1. On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ (on a encore noté f le prolongement).

Exercice 4. Pour $x \in]-1,+\infty[$, on pose $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ -1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Vérifier que f est continue en 0.

Solution 4. f est définie en 0 et de plus,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = -\lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = -1 = f(0).$$

Donc, f est continue en 0.

⇨ **Commentaire** .

◇ *Dans l'exercice 3, on a posé* $f(0) = 1$ *ce qui n'est pas très rigoureux puisque* f *n'est définie que sur* $\mathbb{R}^*$. *On aurait dû poser :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{Arcsin}(x)}{x} \textit{ si } x \neq 0 \\ 1 \textit{ si } x = 0 \end{cases}$ *et en particulier,* $\widetilde{f}(0) = 1$. *Si cette question avait été posée au début d'un problème,le problème aurait continué pendant de nombreuses questions avec la notation* $\widetilde{f}$, *ce qui est une complication inutile. On a donc décidé d'oublier que la lettre* f *désignait une certaine fonction et on a utilisé cette même lettre* f *pour désigner une nouvelle fonction (en posant* $f(0) = 1$*).*

◇ *Dans l'exercice 4, il ne s'agit plus de montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité car quelqu'un l'a fait à notre place en posant* $f(0) = -1$. *Il s'agit par contre de vérifier qu'on a effectivement prolongé par continuité.*

4.4 Continuité en un point et opérations

Sinon, les différents théorèmes généraux sur les limites fournissent immédiatement les différents théorèmes généraux sur la continuité :

Théorème 36. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit x_0 un réel de I.

Si f et g sont continues en x_0, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}^2$), la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0.

Ainsi, une combinaison linéaire de deux, trois, quatre ... fonctions continues en un point est continue en ce point (par récurrence sur le nombre de fonctions).

Théorème 37. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit x_0 un réel de I.

Si f et g sont continues en x_0, alors la fonction $f \times g$ est continue en x_0

Ainsi, un produit de deux, trois, quatre ... fonctions continues en un point est continue en ce point (par récurrence sur le nombre de fonctions).

Théorème 38. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit x_0 un réel de I.

Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.
En particulier, l'inverse d'une fonction continue en x_0 et ne s'annulant pas en x_0 est continu en x_0.

Et enfin,

Théorème 39. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et de longueur non nulle, à valeurs dans $J \subset \mathbb{R}$ et soit g une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit x_0 un réel de I.

Si f est continues en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.

