SESSION 2019

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE PSI

I - Généralités, cas particuliers

1) Soient $r \in]0,+\infty[$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \neq 0$ puis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} \times \frac{(pn)!}{(pn)^r} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{(pn+1)(pn+2)\dots(pn+p)}$$

puis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(pn)^p} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, $R_a = +\infty$. Mais alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série numérique de terme général $\dfrac{(pn)^r}{(pn)!}\left(z^p\right)^n$, $n \geqslant 1$, converge et donc la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{np}$ a un rayon de convergence infini.

2) Les calculs précédents restent valables quand $r = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$S_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$$

et

$$S_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(x) - 1.$$

II - Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

3) Soit $r > 0$. Soit $x > 0$. On sait que $X_x(\Omega) = \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X_x = n) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$ puis $E(X_x) = x$. D'après la formule de transfert,

$$E\left((Z_x)^r\right) = \frac{1}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty} n^r P(X_x = n) \frac{1}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty} n^r \frac{x^n}{n!}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}x^n.$$

Ceci montre que $(Z_x)^r$ admet une espérance et que $E\left((Z_x)^r\right) = \dfrac{e^{-x}}{x^r} S_{r,1}(x)$.

4) Soit $x > 0$. On sait que $E(X_x) = V(X_x) = x$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$0 \leqslant P\left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-1/3}\right) = P\left(|X_x - x| \geqslant x^{2/3}\right) \leqslant \frac{V(X_x)}{\left(x^{2/3}\right)^2} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P\left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-1/3}\right) = 0$.

5) Soit $x > 1$. Alors $1 - x^{-1/3} > 0$. Par croissante de la fonction $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}^+$ (car $r > 0$), on en déduit que $\left\{Z_x \geqslant 1 - x^{-1/3}\right\} = \left\{(Z_x)^r \geqslant \left(1 - x^{-1/3}\right)^r\right\}$.

Puisque la variable $(Z_x)^r$ est positive et admet une espérance, l'inégalité de Markov permet d'affirmer que

$$P\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-1/3}\right) = P\left((Z_x)^r \geqslant \left(1 - x^{-1/3}\right)^r\right) \leqslant \frac{E\left((Z_x)^r\right)}{\left(1 - x^{-1/3}\right)^r}$$

et donc $\left(1-x^{-1/3}\right)^r P\left(Z_x \geqslant 1-x^{-1/3}\right) \leqslant E\left((Z_x)^r\right)$.

Déjà $\left(1-x^{-1/3}\right)^r \underset{x\to+\infty}{\to} 1$. Ensuite, $\left\{Z_x < 1-x^{-1/3}\right\} \subset \left\{|Z_x-1| \geqslant x^{-1/3}\right\}$ puis, par croissance de P, $P\left(Z_x < 1-x^{-1/3}\right) \leqslant P\left(|Z_x-1| \geqslant x^{-1/3}\right)$. D'après la question 4, $P\left(|Z_x-1| \geqslant x^{-1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et donc $P\left(Z_x < 1-x^{-1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Mais alors, $P\left(Z_x \geqslant 1-x^{-1/3}\right) = 1 - P\left(Z_x < 1-x^{-1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.

Finalement, $\left(1-x^{-1/3}\right)^r P\left(Z_x \geqslant 1-x^{-1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.

6) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}E\left(Y_{x,N}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-N+1)\frac{x^n}{n!}e^{-x} = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{n!}{(n-N)!}\frac{x^n}{n!}e^{-x} = e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-N)!}\\ &= e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+N}}{n!} = x^N e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = x^N.\end{aligned}$$

Ceci montre $Y_{x,N}$ admet une espérance et que $e\left(Y_{x,N}\right) = x^N$.

7) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons $H_0 = 1$ puis, pour $j \in [\![1, N]\!]$, posons $H_j = T(T-1)\dots(X-j+1)$. Les polynômes H_j, $j \in [\![0, N]\!]$, sont des polynômes non nuls, de degrés deux à distincts et inférieurs ou égaux à N. Donc, $(H_j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_N[X]$. Puisque $\text{card}\,(H_j)_{0\leqslant j\leqslant N} = N+1 = \dim\left(\mathbb{R}_N[X]\right) < +\infty$, $(P_k)_{0\leqslant j\leqslant N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$. Par suite, il existe des réels a_0, a_1, a_N tels que

$$X^N = \sum_{j=0}^{N} a_j H_j \quad (*).$$

De plus, $N \in \mathbb{N}^*$ et donc, en évaluant en 0 l'égalité précédente, on obtient $a_0 = 0$. Par suite,

$$(X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k H_k\left(X_x\right) = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$E\left((Z_x)^N\right) = \frac{1}{x^N}E\left((X_x)^N\right) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k E\left(Y_{x,k}\right) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k x^k$$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} E\left((Z_x)^N\right) = a_N$. Maintenant, l'analyse du coefficient de X^N dans l'égalité $(*)$ montre que $a_N = 1$ et finalement

$$\lim_{x\to+\infty} E\left((Z_x)^N\right) = 1.$$

8) Tout d'abord, $s = r - N = r - \lfloor r \rfloor \in [0, 1[$. Ensuite, pour $t \geqslant 0$, posons $\varphi(t) = t^s - 1 - s(t-1)$. φ est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $t > 0$,

$$\varphi'(t) = st^{s-1} - s = s\left(t^{s-1} - 1\right).$$

Puisque $s - 1 < 0$, φ' est positive sur $]0, 1]$ et négative sur $[1, +\infty[$. On en déduit que φ admet sur $[0, +\infty[$ un maximum atteint en 1 et égal à $\varphi(1) = 0$. Par suite, φ est négative sur $[0, +\infty[$ et donc,

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ t^s \leqslant s(t-1) + 1.$$

Soient $r > 0$ et $x > 0$. Puisque Z_x est positive, $(Z_x)^s \leqslant s\left(Z_x - 1\right) + 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par $(Z_x) \geqslant 0$ et en tenant compte de $s + N = r$, on obtient

$$(Z_x)^r \leqslant s\left((Z_x)^{N+1} - 1\right) + (Z_x)^N = (1-s)\left(Z_x\right)^N + s\left(Z_x\right)^{N+1}.$$

9) Soit $x > 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, d'après les questions 5 et 8 et par croissance et linéarité de l'espérance,

$$\left(1-x^{-1/3}\right) P\left(Z_x \geqslant 1-x^{-1/3}\right) \leqslant E\left((Z_x)^r\right) \leqslant (1-s)E\left((Z_x)^N\right) + sE\left((Z_x)^{N+1}\right).$$

D'après la question 5, $\left(1-x^{-1/3}\right) P\left(Z_x \geqslant 1-x^{-1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} 1$ et d'après la question 7, $(1-s)\left(Z_x\right)^N + s\left(Z_x\right)^{N+1} \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} (1-s)+s=1$ (car $N \geqslant r-1$ et donc $N \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$). D'après le théorème des gendarmes,

$$E\left(\left(Z_x\right)^r\right) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} 1.$$

III - Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geqslant 2$

10) Soit $x>0$. Puisque $r>0$, φ_x est continue sur $[1,+\infty[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour $t>1$,

$$\begin{aligned}\varphi_x'(t) &= (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-r}(t-1)^{r-1} = ((1-r)(t-1)+rt)t^{-r}(t-1)^{r-1} = (t+r-1)t^{-r}(t-1)^{r-1}\\ &\geqslant rt^{-r}(t-1)^{r-1} > 0.\end{aligned}$$

La fonction φ_x est donc strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et continue sur $[1,+\infty[$. φ_x réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\left[\varphi(1), \lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_x(t)\right[$. $\varphi_x(1)=-x<0$ et d'autre part, $\varphi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{1-r}\times t^r = t \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$. Ainsi, $0 \in \left[\varphi(1), \lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_x(t)\right[$ et donc, il existe un réel t_x et un seul dans $[1,+\infty[$ et même $]1,+\infty[$ tel que $\varphi\left(t_x\right)=0$.

Puisque φ_x est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, si $t\in[1,t_x[$, $\varphi_x(t)<0$, si $t\in]t_x,+\infty[$, $\varphi_x(t)>0$ et $\varphi_x\left(t_x\right)=0$.

Soient $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_{n+1}(x)-u_n(x) &= \frac{(n+1)^r}{(n+1)!}x^{n+1} - \frac{n^r}{n!}x^n = \frac{x^n}{n!}\left((n+1)^{r-1}x - n^r\right) = -\frac{x^n(n+1)^{r-1}}{n!}\left((n+1)^{1-r}n^r - x\right)\\ &= -\frac{x^n(n+1)^{r-1}}{n!}\varphi_x(n+1).\end{aligned}$$

Donc, $u_{n+1}(x)-u_n(x)$ est du signe de $-\varphi_x(n+1)$. Si $n<\lfloor t_x\rfloor$ ou encore $n\leqslant\lfloor t_x\rfloor-1$, alors $n+1\leqslant\lfloor t_x\rfloor\leqslant t_x$ et donc $u_{n+1}(x)-u_n(x)\geqslant 0$ et si $n\geqslant\lfloor t_x\rfloor$, alors $n+1\geqslant\lfloor t_x\rfloor+1\geqslant t_x$ et donc $u_{n+1}(x)-u_n(x)\leqslant 0$. La suite finie $\left(u_n(x)\right)_{0\leqslant n\leqslant\lfloor t_x\rfloor}$ est croissante et la suite $\left(u_n(x)\right)_{n\geqslant\lfloor t_x\rfloor}$ est décroissante.

11) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour $x>0$ et $x\geqslant 1-\alpha$, $\varphi_x(x+\alpha) = (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x\left[\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\dfrac{\alpha-1}{x}\right)^r - 1\right]$ puis

$$\begin{aligned}\varphi_x(x+\alpha) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left[\left(1+\frac{\alpha(1-r)}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{(\alpha-1)r}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-1\right]\\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left[1+\frac{\alpha(1-r)+r(\alpha-1)}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right] \underset{x\to+\infty}{=} \alpha-r+o(1).\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(x+\alpha) = \alpha-r$.

Si $\alpha>r$, alors $\alpha-r>0$ et donc $\varphi_x(x+\alpha)>0$ pour x suffisamment grand. Par suite, si $\alpha>r$, $x+\alpha>t_x$ pour x suffisamment grand. De même, si $\alpha<r$, $x+\alpha<t_x$ pour x suffisamment grand.

Soit $\varepsilon>0$. Alors $r+\varepsilon>r$ et $r-\varepsilon<r$. Pour x suffisamment grand, $x+r+\varepsilon>t_x$ et $x+r-\varepsilon<t_x$. Donc, il existe un réel $A>0$ tel que, pour $x\geqslant A$, $-\varepsilon<t_x-x-r<\varepsilon$. Ceci montre que $\lim\limits_{x\to+\infty}(t_x-x-r)=0$.

12) Soit $k\in\mathbb{Z}$. Pour $x\geqslant -k$, $\lfloor x\rfloor+k\in\mathbb{N}$ puis, en posant $p=\lfloor x\rfloor$,

$$\frac{u_{p+k}(x)}{u_p(x)} = \frac{(p+k)^r}{p^r}\times\frac{x^k}{(p+1)(p+2)\dots(p+k)}.$$

Puisque $x-1\leqslant p\leqslant x$, on a $p \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et en particulier $p \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$. On en déduit que

$$\frac{u_{p+k}(x)}{u_p(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{p^r}{p^r}\times\frac{x^k}{p^k} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^k}{x^k} = 1.$$

Donc, pour tout entier relatif k, $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x\rfloor}(x)$.

13) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} = \displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \dfrac{u_i(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}} \underset{x\to+\infty}{\to} \displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} 1 = m+1$. Par suite, pour x au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}} \geqslant (m+1)-1 = m$ ou encore $\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geqslant m u_{\lfloor x\rfloor}(x)$.

Ainsi, pour x suffisamment grand et $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
u_{\lfloor x\rfloor}(x) &\leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \frac{i^r}{i!}x^i \\
&\leqslant \frac{x^r}{m}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} \frac{x^i}{i!} \text{ (car } r>0) \\
&\leqslant \frac{x^r}{m}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^r e^x}{m}.
\end{aligned}$$

14) Montrons que $u_{\lfloor x\rfloor}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $m = \lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\dfrac{1}{m} \leqslant \varepsilon$. D'après la question précédente, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \geqslant A$, $0 \leqslant u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leqslant \dfrac{x^r e^x}{m} = \varepsilon x^r e^x$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0/\ \forall x > 0$, $\left(x \geqslant A \Rightarrow \left|u_{\lfloor x\rfloor}(x)\right| \leqslant \varepsilon x^r e^x\right)$ et donc $u_{\lfloor x\rfloor}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$.

Soit alors $k \in \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x\rfloor}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$.

Montrons maintenant que $M_x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$. Puisque $t_x - x$ tend vers r quand x tend vers $+\infty$ et que $\lfloor r\rfloor - 1 < r < \lfloor r\rfloor + 1$, pour x suffisamment grand, $\lfloor r\rfloor - 1 \leqslant t_x - x \leqslant \lfloor r\rfloor + 1$. Mais alors, pour x suffisamment grand, $t_x - \lfloor x\rfloor \geqslant t_x - x \geqslant \lfloor r\rfloor - 1$ et aussi $t_x - \lfloor x\rfloor \leqslant t_x - (x-1) \leqslant \lfloor r\rfloor + 1 + 1 = \lfloor r\rfloor + 2$. Donc, pour x suffisamment grand, $t_x - \lfloor x\rfloor$ est un certain entier compris au sens large entre $\lfloor r\rfloor - 1$ et $\lfloor r\rfloor + 2$ ou encore, pour x suffisamment grand, $M_x = u_{t_x} = u_{\lfloor x\rfloor+i}$ où i est un entier compris au sens large entre $\lfloor r\rfloor - 1$ et $\lfloor r\rfloor + 2$.

Pour x suffisamment grand, M_x est l'un des 4 nombres positifs $u_{\lfloor x\rfloor+i}$, $\lfloor r\rfloor - 1 \leqslant i \leqslant \lfloor r\rfloor + 2$ et donc $0 \leqslant M_x \leqslant \displaystyle\sum_{i=\lfloor r\rfloor-1}^{\lfloor r\rfloor+2} u_{\lfloor x\rfloor+i}$.
Chacun des 4 termes est négligeable devant $x^r e^x$ quand x tend vers $+\infty$ et donc

$$M_x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r e^x\right).$$

15) Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$,

$$|D_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| = \left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \frac{1+|z|^n}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}.$$

Mais alors, $|D_n u_{n-1}(x)| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(u_{n-1}(x)\right)$ et $|D_n u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(u_n(x)\right)$. D'après la question 1, les séries numériques de termes généraux respectifs $u_{n-1}(x)$ et $u_n(x)$ sont convergentes et donc les séries de termes généraux respectifs $D_n u_{n-1}(x)$ et $D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes.

16) Soit $x > 0$. Puisque toutes les séries considérées convergent, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) \\
&= D_1 u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(D_{n+1} - D_n\right) u_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{n^r}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} (zx)^n = S_{r,1}(zx).
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et tout $x > 0$, la série de terme général $u_n(x)$ converge et en particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = 0$ puis

$$\begin{aligned}
|S_{r,1}(x)| &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n| \, |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \\
&= \frac{2}{|1-z|} \left(\sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor + 1}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x)) \right) \\
&= \frac{2}{|1-z|} \left(\left(u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - u_0(x)\right) + \left(u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - \lim_{n \to +\infty} u_n(x)\right) \right) \text{ (série télescopique)} \\
&= \frac{2}{|1-z|} \left(2u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)\right) = \frac{4M_x}{|1-z|}.
\end{aligned}$$

D'après la question 14, $M_x \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$ et donc $S_{r,1}(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$.

17) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}\left(\zeta^k x\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \left(\sum_{k=0}^{p-1} \left(\zeta^n\right)^k \right) \text{ (somme de } p \text{ séries convergentes).}$$

Si $n \in p\mathbb{Z}$, alors $\zeta^n = 1$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \left(\zeta^n\right)^k = p$. Si $n \notin p\mathbb{Z}$, alors $\zeta^n \neq 1$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \left(\zeta^n\right)^k = \frac{1 - \zeta^{np}}{1 - \zeta^n} = 0$ car $\zeta^p = 1$. Par suite,

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}\left(\zeta^k x\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(pm)^r}{(pm)!} x^{pm} p = pS_{r,p}(x).$$

Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\left|\zeta^k\right| = 1$ et $\zeta^k \neq 1$. D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}\left(\zeta^k x\right) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$ et donc

$$pS_{r,p}(x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}\left(\zeta^k x\right) \underset{x \to +\infty}{=} S_{r,1}(x) + o\left(x^r e^x\right).$$

Mais alors, puisque $S_{r,1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r e^x$ d'après la question 9 et donc $S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{=} \dfrac{x^r e^x}{p} + o\left(x^r e^x\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^r e^x}{p}$. Ceci démontre la validité de $H_{r,p}$, $p \geqslant 2$.

IV - Application à une équation différentielle

18) Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $R_c > 0$. Pour $t \in]-R_c, R_c[$, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$. Pour tout $t \in]-R_c, R_c[$,

$$\begin{aligned}
tf''(t) - f(t) &= t \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)nc_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n+1)c_{n+1} - c_n\right) t^n.
\end{aligned}$$

puis, par unicité des coefficients d'une série entière,

$$\begin{aligned}
\forall t \in]-R_c, R_c[, \ tf''(t) - f(t) = 0 \text{ et } f'(0) = 1 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ n(n+1)c_{n+1} - c_n = 0 \\
&\Leftrightarrow c_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ c_{n+1} = \frac{c_n}{(n+1)n} \text{ et } c_1 = 1 \\
&\Leftrightarrow c_0 = 0 \text{ et } c_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2, \ c_n = \frac{1}{n(n-1) \times (n-1)(n-2) \times \ldots \times (2 \times 1)} c_1 \\
&\Leftrightarrow c_0 = 0 \text{ et } c_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2, \ c_n = \frac{1}{n(n-1) \times (n-1)(n-2) \times \ldots \times (2 \times 1)} c_1 \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ c_n = \frac{n}{(n!)^2}
\end{aligned}$$

Les calculs précédents ont été effectués sous l'hypothèse $R_c > 0$. La règle de d'ALEMBERT montre que la série entière associée à la suite $\left(\dfrac{n}{(n!)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence infini ce qui valide les calculs précédents sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nt^n}{(n!)^2}.$$

19) D'après la formule de STIRLING,

$$(2n)!c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}4^n$$

et donc

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n.$$

20) D'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\begin{aligned} f(t) &\underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n t^n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^{1/2}}{(2n)!} \left(2\sqrt{t}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{1/2,2}\left(2\sqrt{t}\right) \\ &\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2}\left(2\sqrt{t}\right)^{1/2} e^{2\sqrt{t}} = \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{2\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

