SESSION 2019

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) H_n est symétrique réelle car pour tout $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, $h_{i,j}^{(n)} = \dfrac{1}{i+j+1} = h_{j,i}^{(n)}$. Soit $X = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
{}^tXH_nX &= \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} h_{j,k}^{(n)} x_j x_k = \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} \frac{1}{j+k+1} x_j x_k \\
&= \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} x_j x_k \int_0^1 t^{j+k}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} x_j x_k t^{j+k} \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\widetilde{X}(t) \right)^2 dt \geqslant 0.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
{}^tXH_nX = 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 \left(\widetilde{X}(t) \right)^2 dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in [0,1],\ \left(\widetilde{X}(t) \right)^2 = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{X} = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)} \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k = 0 \Leftrightarrow X = 0.
\end{aligned}$$

En résumé, pour tout $X = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXH_nX \geqslant 0$ et de plus, $({}^tXH_nX = 0 \Leftrightarrow X = 0)$. La matrice H_n est donc symétrique réelle et définie positive.

2) Soit $X \in \mathscr{V}$. ${}^tXH_nX = {}^tX(\rho_n X) = \rho_n {}^tXX = \rho_n \|X\|^2$.

Réciproquement, H_n est symétrique réelle et donc H_n est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle d'après lé théorème spectral. Soient $D = \operatorname{diag}(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $H_n = PD{}^tP$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tXH_nX = \rho_n \|X\|^2$ puis $Y = {}^tPX$ de sorte que $X = PY$. Posons $Y = (y_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.

$$\begin{aligned}
0 = \rho_n \|X\|^2 - {}^tXH_nX &= \rho_n {}^t(PY)PY - {}^t(PY)H_n(PY) = {}^tY{}^tPPY - {}^tY{}^tPH_nPY = \rho_n {}^tYY - {}^tYDY \\
&= \rho_n \sum_{k=0}^{n-1} y_k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k y_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\rho_n - \lambda_k)\, y_k^2.
\end{aligned}$$

Puisque ρ_n est la plus grande des valeurs propres de H_n, tous les termes de la somme ci-dessus sont positifs et donc cette somme est nulle si et seulement si pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k)\, y_k^2 = 0$. Ceci équivaut au fait que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k)\, y_k = 0$ ou encore pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\rho_n y_k = \lambda_k y_k$. Mais alors, $\rho_n Y = DY$ puis

$$H_nX = PD{}^tPPY = PDY = \rho_n PY = \rho_n X$$

et donc X est dans $\mathscr{V}$.

Finalement, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(X \in \mathscr{V} \Leftrightarrow {}^tXH_nX = \rho_n \|X\|^2 \right)$.

3) $${}^tX_0H_nX_0 = \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} h_{j,k}^{(n)} x_j x_k \leqslant \left| \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} h_{j,k}^{(n)} x_j x_k \right| \leqslant \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} h_{j,k}^{(n)} |x_j|\,|x_k| = {}^t|X_0|\, H_n\, |X_0|.$$

Puisque $X_0 \in \mathscr{V}$, en posant $X = |X_0|$, ${}^tXH_nX \geqslant {}^tX_0H_nX_0 = \rho_n \|X_0\|^2 = \rho_n \|X\|^2$. D'autre part, d'après un calcul de la question précédente, $\rho_n\|X\|^2 \geqslant {}^tXH_nX$ (car $\rho_n\|X\|^2 - {}^tXH_nX = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\rho_n - \lambda_k)\, y_k^2 \geqslant 0$) et finalement ${}^tXH_nX = \rho_n\|X\|^2$. D'après la question 2), $|X_0| = X$ est dans $\mathscr{V}$.

4) Les composantes de $|X_0|$ sont positives et non toutes nulles et les coefficients de H_n sont strictement positifs. Donc, les composantes de $H_n\,|X_0|$ sont strictement positives et en particulier, ces composantes sont toutes non nulles.
Les valeurs propres de H_n sont strictement positives car H_n est définie positive. En particulier, $\rho_n > 0$.
Puisque $|X_0|$ est dans $\mathscr{V}$, on a $|X_0| = \dfrac{1}{\rho_n}H_n\,|X_0|$. On en déduit que les composantes de $|X_0|$ sont strictement positives et donc que les composantes de X_0 sont toutes non nulles.

5) En tant que sous-espace propre, $\mathscr{V}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $X_0 = \left(x_k^{(0)}\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}$. Soit $X = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ un vecteur quelconque de $\mathscr{V}$. Puisque $\mathscr{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le vecteur $x_0X_0 - x_0^{(0)}X$ est encore un vecteur de $\mathscr{V}$ et sa première composante est nulle. D'après la question précédente, $x_0X_0 - x_0^{(0)}X = 0$, ce vecteur ne pouvant être non nul. La famille (X, X_0) est donc liée puis $X \in \text{Vect}\,(X_0)$.

Ainsi, $\mathscr{V} \subset \text{Vect}\,(X_0)$ puis $\mathscr{V} = \text{Vect}\,(X_0)$. Donc, $\mathscr{V}$ est de dimension 1.

B. Inégalité de Hilbert

6) Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_kX^k$. Soit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{k+1}X^{k+1}$ de sorte que $Q' = P$.

$$\int_0^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right)e^{i\theta}\,d\theta = \sum_{k=0}^{p} a_k \int_0^{\pi} e^{i(k+1)\theta}\,d\theta = \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{e^{i(k+1)\pi} - 1}{i(k+1)}$$
$$= -i\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{k+1}(-1)^{k+1} - \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{k+1}\right) = i\,(Q(1) - Q(-1)) = i\int_{-1}^{1} P(t)\,dt.$$

Donc,

$$\left|\int_{-1}^{1} P(t)\,dt\right| = \left|\int_0^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right)e^{i\theta}\,d\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi} \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|\left|e^{i\theta}\right|\,d\theta = \int_0^{\pi} \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|\,d\theta.$$

En appliquant au polynôme $P = \widetilde{X}^2$, on obtient

$${}^tXH_nX = \int_0^{1} \left(\widetilde{X}(t)\right)^2\,dt \leqslant \int_{-1}^{1} \left(\widetilde{X}(t)\right)^2\,dt = \left|\int_{-1}^{1} \left(\widetilde{X}(t)\right)^2\,dt\right| \leqslant \int_0^{\pi} \left|\widetilde{X}^2\left(e^{i\theta}\right)\right|\,d\theta = \int_0^{\pi} \left|\widetilde{X}\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\,d\theta.$$

7) Ensuite, puisque $\widetilde{X}$ est à coefficients réels, pour tout réel θ, $\widetilde{X}\left(e^{-i\theta}\right) = \overline{\widetilde{X}\left(e^{i\theta}\right)}$. La fonction $\theta \mapsto \left|\widetilde{X}\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 = \widetilde{X}\left(e^{i\theta}\right)\widetilde{X}\left(e^{-i\theta}\right)$ est donc paire puis

$$\begin{aligned}
{}^tXH_nX &\leqslant \int_0^{\pi} \left|\widetilde{X}\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widetilde{X}\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_ke^{ik\theta}\right)\left(\sum_{l=0}^{n-1} x_le^{-il\theta}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n-1} x_kx_l \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2\int_0^{2\pi} d\theta + \sum_{k\neq l} x_kx_l\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta}\,d\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi x_k^2 + 0\right) = \pi\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 \\
&= \pi\|X\|^2.
\end{aligned}$$

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à la valeur propre ρ_n. ${}^tXH_nX = {}^tX\,(\rho_nX) = \rho_n\|X\|^2$ et donc $\rho_n\|X\|^2 \leqslant \pi\|X\|^2$. X n'est pas nul et donc $\|X\|^2 > 0$. Après simplification par $\|X\|^2$, on obtient $\rho_n \leqslant \pi$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \rho_n \leqslant \pi.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $X_n = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de H_n associé à ρ_n. Soit $X = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix} = (x'_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\rho_n \|X_n\|^2 = {}^tX_nH_nX_n &= \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} h_{j,k}^{(n)} x_k x_l = \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n} h_{j,k}^{(n+1)} x'_k x'_l = {}^tXH_{n+1}X \\ &\leqslant \rho_{n+1}\|X\|^2 = \rho_{n+1}\|X_n\|^2.\end{aligned}$$

Après simplification par le réel strictement positif $\|X_n\|^2$, on obtient $\rho_n \leqslant \rho_{n+1}$. La suite $(\rho_n)_{n \geqslant 1}$ est donc croissante.

Ainsi, la suite $(\rho_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante et majorée par π. On en déduit que la suite $(\rho_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente.

C. Un opérateur intégral

9) • Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$ et chaque $t \in [0,1[$, $\left|t^kf(t)\right| = t^k|f(t)| \leqslant |f(t)|$ et donc, pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $t \mapsto t^kf(t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$. Par suite, pour chaque x de $[0,1[$, on peut écrire

$$T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^1 t^kf(t)\ dt\right)x^k.$$

$T_n(f)$ est donc une fonction polynomiale sur $[0,1[$. En particulier, $T_n(f)$ est continue et intégrable sur $[0,1[$. Ceci montre que T_n est une application de E dans E.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour $x \in [0,1[$,

$$T_n(\alpha f + \beta g)(x) = \int_0^1 K_n(xt)\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) dt = \alpha\int_0^1 K_n(xt)f(t)\ dt + \beta\int_0^1 K_n(xt)g(t)\ dt = \left(\alpha T_n(f) + \beta T_n(g)\right)(x).$$

Par suite, $T_n(\alpha f + \beta g) = \alpha T_n(f) + \beta T_n(g)$. T_n est donc linéaire puis T_n est un endomorphisme de E.

• L'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Pour ce produit scalaire, $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ est de dimension 1 et en particulier n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit f un élément non nul de cet orthogonal. Par construction, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 t^kf(t)\ dt = 0$ puis $T_n(f) = 0$.

f est un élément non nul de E tel que $T_n(f) = 0$. Donc, T_n admet 0 pour valeur propre.

10) Soit $X = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $x \in [0,1[$, posons $Y(x) = \left(x^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}T_n\left(\widetilde{X}\right)(x) &= \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1} t^kx^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n-1} x_lt^l\right) dt \\ &= \sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n-1} x^kx_l\int_0^1 t^{k+l}\ dt = \sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n-1} \frac{x^kx_l}{k+l+1} \\ &= {}^t(Y(x))H_nX.\end{aligned}$$

• On sait que les valeurs propres de H_n sont des réels strictement positifs. Soient λ une valeur propre de H_n puis X un vecteur propre associé. Pour tout x de $[0,1[$,

$$T_n\left(\widetilde{X}\right)(x) = {}^t(Y(x))H_nX = \lambda{}^t(Y(x))X = \lambda\sum_{k=0}^{n-1} x_kx^k = \lambda\widetilde{X}(x)$$

et donc $T_n\left(\widetilde{X}\right) = \lambda\widetilde{X}$. Enfin, X n'est pas nul et donc $\widetilde{X}$ n'est pas le polynôme nul et en particulier admet un nombre fini de racines. La fonction $t \mapsto \widetilde{X}(t)$ n'est pas la fonction nulle sur $[0,1[$. Ainsi, $\widetilde{X}$ est un élément non nul de E tel que $T_n\left(\widetilde{X}\right) = \lambda\widetilde{X}$. Ceci montre que λ est valeur propre de T_n.

• Soit λ une valeur propre non nulle de T_n. Donc, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $T_n(f) = \lambda f$. Puisque $\lambda \neq 0$, on peut écrire $f = \dfrac{1}{\lambda} T_n(f) = T_n\left(\dfrac{1}{\lambda} f\right) \in \mathrm{Im}\,(T_n)$. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}\,(T_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc f est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$, les coefficients de f puis $X = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$. X est un élément non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $f = \widetilde{X}$. Pour tout x de $[0,1[$, ${}^t(Y(x)) H_n X = T_n\left(\widetilde{X}\right)(x) = \lambda \widetilde{X}(x)$ et donc

$$\forall x \in [0,1[,\ \lambda \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = \sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n-1} \frac{x^k x_l}{k+l+1}.$$

Les égalités ci-dessus étant vraies pour une infinité de valeurs de x, on en déduit que les polynômes sont égaux et donc que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} \frac{x_l}{k+l+1} = \lambda x_k$ puis que $H_n X = \lambda X$. Puisque X n'est pas nul, λ est valeur propre de H_n.

On a montré que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles. En particulier, ρ_n est une valeur propre de T_n.

11) • Soit $\varphi \in \mathscr{A}$. $T_n(\varphi)$ est un polynôme qui se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ et $\dfrac{1}{\varphi}$ est continue sur $]0,1[$ et se prolonge en une fonction continue sur $]0,1[$. Donc, $\dfrac{1}{\varphi} T_n(\varphi)$ est continue sur $]0,1[$ et se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0,1]$. Donc, $\displaystyle\sup_{]0,1[} \left(\frac{1}{\varphi} T_n(\varphi)\right)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• D'après la partie A, H_n admet au moins un vecteur propre X associé à la valeur propre ρ_n dont les composantes sont strictement positives. $f = \widetilde{X}$ est alors un vecteur propre de T_n associé à la valeur propre ρ_n qui est un polynôme dont les coefficients sont strictement positifs. Pour tout $x \in [0,1]$, $\rho_n f(x) = T_n(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 K_n(xt) f(t)\ dt$.

Soit alors $\varphi \in \mathscr{A}$. La fonction $g = \dfrac{f}{\varphi}$, prolongée par continuité en 0 et 1, est continue et positive sur et non nulle sur $[0,1]$. Pour tout $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} |\rho_n g(x)| &= \rho_n \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \int_0^1 \frac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)} \frac{f(t)}{\varphi(t)}\ dt = \int_0^1 \left|\frac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)}\right| |g(t)|\ dt \\ &\leqslant \|g\|_\infty \int_0^1 \frac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)}\ dt \leqslant \|g\|_\infty \sup_{u \in]0,1[} \int_0^1 \frac{K_n(ut)\varphi(t)}{\varphi(u)}\ dt. \end{aligned}$$

La fonction g est continue sur le segment $[0,1]$. Donc, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $|g(x_0)| = \|g\|_\infty$. Pour $x = x_0$, on a en particulier $\rho_n \|g\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty \displaystyle\sup_{u \in]0,1[} \int_0^1 \frac{K_n(ut)\varphi(t)}{\varphi(u)}\ dt$ puis $\rho_n \leqslant \displaystyle\sup_{u \in [0,1]} \int_0^1 \frac{K_n(ut)\varphi(t)}{\varphi(u)}\ dt = \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)\ dt$ car $\|g\|_\infty > 0$.

Ainsi, $\forall \varphi \in \mathscr{A}$, $\rho_n \leqslant \displaystyle\sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)\ dt$. ρ_n est un minorant de $\mathscr{E} = \left\{\displaystyle\sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)\ dt,\ \varphi \in A\right\}$. Inf$(\mathscr{E})$ étant le plus grand de ces minorants, on a montré que

$$\rho_n \leqslant \inf_{\varphi \in \mathscr{A}} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)\ dt.$$

• On reprend la fonction f du paragraphe précédent. Puisque les coefficients du polynôme f sont strictement positifs, f est en fait un élément de $\mathscr{A}$. De plus, pour tout $x \in [0,1[$, $\rho_n f(x) = T_n(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 K_n(xt) f(t)\ dt$ et donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(xt) f(t)\ dt$ est constante sur $]0,1[$, égale à ρ_n.

f est un élément de $\mathscr{A}$ tel que $\rho_n = \displaystyle\sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{f(x)} \int_0^1 K_n(xt) f(t)\ dt$ et donc

$$\rho_n = \inf_{\varphi \in \mathscr{A}} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)\ dt = \operatorname*{Min}_{\varphi \in \mathscr{A}} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)\ dt.$$

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

12) Soit $a \in]0,1[$. Soit $\begin{array}{cccc} \Phi_n & : &]0,a] \times [0,1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & \dfrac{t^n\varphi(t)}{1-tx} \end{array}$ de sorte que pour tout $x \in]0,a]$, $J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 P_n(x,t)\,dt$.

• Pour chaque $x \in]0,a]$, la fonction $t \mapsto \Phi_n(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$ car $\dfrac{t^n\varphi(t)}{1-tx} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{\varphi(t)}{1-x} > 0$.

• La fonction Φ_n admet sur $]0,a] \times [0,1[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par : $\forall (x,t) \in]0,a] \times [0,1[$, $\dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}$. De plus,

- pour chaque $x \in]0,a]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,1[$,
- pour chaque $t \in [0,1[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,a]$,
- pour chaque $(x,t) \in]0,a] \times [0,1[$, la fonction $\left|\dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2} \leqslant \dfrac{\varphi(t)}{(1-a)^2}$ qui est une fonction de t, continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,1[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction J_n est dérivable sur $]0,a]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a \in [0,1[$, on a montré que la fonction J_n est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in [0,1[,\ J_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt.$$

Pour $x \in]0,1[$, on a alors

$$xJ_n'(x) + J_n(x) = \int_0^1 \frac{xt^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\,dt = \int_0^1 \frac{t^n(xt+1-xt)\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt.$$

13) Soit $n \geqslant 1$ et $x \in]0,1[$. Une intégration par parties, licite au vu des hypothèses faites sur φ, fournit

$$\begin{aligned} n\left(J_n(x) - J_{n-1}(x)\right) &= \int_0^1 nt^{n-1}\frac{(t-1)\varphi(t)}{1-tx}\,dt = \left[t^n\frac{(t-1)\varphi(t)}{1-tx}\right]_0^1 - \int_0^1 t^n\left(\frac{(t-1)\varphi'(t)+\varphi(t)}{1-tx} + \frac{x(t-1)\varphi(t)}{(1-tx)^2}\right)dt \\ &= -\int_0^1 \frac{t^n((1-tx)+x(t-1))\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt \\ &= (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt, \end{aligned}$$

et donc

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt \text{ avec } c = 0.$$

Si $n = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt &= \int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt = \left[\frac{1-t}{1-tx}\varphi(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x-1}{(1-tx)^2}\varphi(t)\,dt \\ &= -\varphi(0) - (x-1)\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt \end{aligned}$$

et donc $\varphi(0) + (x-1)\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt = 0$. L'égalité reste vraie quand $n = 0$ avec la convention $0J_{-1}(x) = 0$ et avec $c = \varphi(0)$,.

14) Soit $x \in]0,1[$. D'après les deux questions précédentes,

$$
\begin{aligned}
x(1-x)J_n'(x) &= -(x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,dt + (x-1)J_n(x)\\
&= -nJ_n(x) + c + nJ_{n-1}(x) + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt + (x-1)J_n(x)\\
&= (-n+x-1)J_n(x) + c + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt + n\int_0^1 \frac{t^{n-1}(1-tx+tx)\varphi(t)}{1-tx}\,dt\\
&= (-n+x-1)J_n(x) + c + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,dt + nx\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\,dt\\
&= (nx-n+x-1)J_n(x) + c + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,dt\\
&= c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,dt.
\end{aligned}
$$

15) On note (E) l'équation considérée. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{\gamma}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, les solutions de (E) sur $[0,1[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace de dimension 1. La fonction $f_0 : t \mapsto (1-t)^\gamma$ est une solution non nulle de (E) sur $[0,1[$ et donc les solutions de (E) sur $[0,1[$ sont les fonctions de la forme $y : t \mapsto \lambda(1-t)^\gamma$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

y est strictement positive sur $]0,1[$ si et seulement si $\lambda > 0$. $\dfrac{1}{y}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ si et seulement si $\gamma \leqslant 0$. Ensuite, $(1-t)y(t) = \lambda(1-t)^{\gamma+1}$ et donc $(1-t)y(t) \underset{t\to 1}{\to} 0$ si et seulement si $\gamma > -1$.

Réciproquement, si $\lambda > 0$ et $-1 < \gamma \leqslant 0$, y est continue et intégrable sur $[0,1[$, strictement positive sur $]0,1[$, $\dfrac{1}{y}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ et $(1-t)y(t) \underset{t\to 1}{\to} 0$.

16) Soit $n \geqslant 1$. Soit $\gamma \in]-1,0]$. Pour tout réel t, $\varphi(t) = (1-t)^\gamma$. Pour tout $x \in]0,1[$,

$$
\Phi_n(x) = \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)} = x^n J_n(x)(1-x)^{-\gamma}.
$$

Φ_n est dérivable sur $[0,1[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1[$. Pour $x \in]0,1[$,

$$
\begin{aligned}
\Phi_n'(x) &= nx^{n-1}J_n(x)(1-x)^{-\gamma} + x^n J_n'(x)(1-x)^{-\gamma} + \gamma x^n J_n(x)(1-x)^{-\gamma-1}\\
&= \left(\frac{n}{x} + \frac{\gamma}{1-x}\right)\frac{x^n J_n(x)}{(1-x)^\gamma} + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}} x(1-x)J_n'(x)\\
&= \left(\frac{n}{x} + \frac{\gamma}{1-x}\right)\Phi_n(x) + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left(1 + (n+1)(x-1)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma\,dt - \int_0^1 \frac{\gamma t^n(1-t)^\gamma}{1-tx}\,dt\right)\\
&= \left(\frac{n}{x} + \frac{\gamma}{1-x}\right)\Phi_n(x) - (n+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left(1 + \frac{n\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)} - \gamma J_n(x)\right)\\
&= \left(-\frac{1}{x} + \frac{\gamma}{1-x}\right)\Phi_n(x) - \frac{\gamma\Phi_n(x)}{x(1-x)} + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left(1 + \frac{n\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}\right)\\
&= \left(\frac{-(1-x) + \gamma x - \gamma}{1-x}\right)\frac{\Phi_n(x)}{x} + \left(1 + \frac{n!}{(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n)}\right)\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\\
&= -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}.
\end{aligned}
$$

en posant $c_n = 1 + \dfrac{n!}{(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n)}$ pour $n \geqslant 1$ et $c_0 = 0$.

17) Soit $n \geqslant 1$. Les résultats des questions 12) à 16) sont encore valable à l'identique sur $[0,1[$: J_n puis Φ_n sont dérivables sur $[0,1[$. Ensuite,

$$\forall x \in [0,1[,\ \Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}} \Rightarrow \forall x \in]0,1[,\ x\Phi_n'(x) + (\gamma+1)\Phi_n(x) = c_n\frac{x^n}{(1-x)^{\gamma+1}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1[,\ x^{\gamma+1}\Phi_n'(x) + (\gamma+1)x^{\gamma}\Phi_n(x) = c_n\frac{x^{n+\gamma}}{(1-x)^{\gamma+1}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1[,\ \left(x^{\gamma+1}\Phi_n\right)'(x) = c_n\frac{x^{n+\gamma}}{(1-x)^{\gamma+1}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1[,\ x^{\gamma+1}\Phi_n(x) - 0\Phi_n(0) = c_n\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\ dt$$

$(0^{\gamma+1} = 0$ car $\gamma > -1)$

$$\Rightarrow \forall x \in]0,1[,\ \Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{\gamma+1}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\ dt.$$

18) Soient $n \geqslant 1$ et $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)\ dt = \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 \frac{1-(tx)^n}{1-tx}\varphi(t)\ dt = \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1-tx}\ dt - \frac{x^n}{\varphi(x)}\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\ dt\\ &= \frac{J_0(x)}{\varphi(x)} - \frac{x^nJ_n(x)}{\varphi(x)} = \Phi_0(x) - \Phi_n(x) = \frac{c_0}{x^{\gamma+1}}\int_0^x \frac{t^{\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\ dt - \frac{c_n}{x^{\gamma+1}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\ dt.\end{aligned}$$

En posant $\gamma = -\alpha$, on a encore $c_n = \dfrac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)} = \theta_n$ puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)\ dt = r_n(x) &= \frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{t^{-\alpha}}{(1-t)^{1-\alpha}}\ dt - \frac{\theta_n}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{t^{n-\alpha}}{(1-t)^{1-\alpha}}\ dt\\ &= \frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_nt^n}{t^{\alpha}(1-t)^{1-\alpha}}\ dt.\end{aligned}$$

Pour chaque $\gamma \in]-1,0[$, la fonction $\varphi_\gamma\ :\ t \mapsto (1-t)^{\gamma}$ est dans $\mathscr{A}$. De plus, γ décrit $]-1,0[$ si et seulement si α décrit $]0,1[$. Donc,

$$\begin{aligned}\rho_n &\leqslant \inf_{\varphi\in\mathscr{A}}\sup_{x\in]0,1[}\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi(t)\ dt\\ &\leqslant \inf_{\gamma\in]-1,0[}\sup_{x\in]0,1[}\frac{1}{\varphi_\gamma(x)}\int_0^1 K_n(xt)\varphi_\gamma(t)\ dt = \inf_{\alpha\in]0,1[}\sup_{x\in]0,1[}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_nt^n}{t^{\alpha}(1-t)^{1-\alpha}}\ dt.\end{aligned}$$

19) $\rho_n \leqslant \displaystyle\inf_{\alpha\in]0,1[}\theta_n^{(1-\alpha)/n}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{1}{t^{\alpha}(1-t)^{1-\alpha}}\ dt \leqslant \theta_n^{(1-\frac{1}{2})/n}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\frac{1}{2}}}\ dt = \theta_n^{\frac{1}{2n}}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ dt.$

Quand $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\theta_n = \dfrac{n!}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(2-\dfrac{1}{2}\right)\dots\left(n-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{2^nn!}{1\times3\times\ldots\times(2n-1)} = \dfrac{2^nn!(2\times4\times\ldots\times(2n))}{(2n)!} = \dfrac{2^{2n}n!^2}{(2n)!}$ puis $\theta_n^{1/(2n)} = \omega_n$. Ensuite, en posant $u = \sqrt{t}$ et donc $t = u^2$, $dt = 2u\ du$, on obtient

$$\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ dt = 2\int_0^{\theta_n^{-2/n}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du = 2\left[\mathrm{Arcsin}(u)\right]_0^{\omega_n^{-1}} = 2\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right),$$

et donc

$$\rho_n \leqslant 2\omega_n\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right).$$

20) D'après la formule de Stirling,

$$\omega_n^{2n} = 2^{2n}\frac{n!^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n}\frac{\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}2\pi n}{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}} = \sqrt{n\pi}$$

puis

$$\begin{aligned}\omega_n = \left(\omega_n^{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} &\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{1}{2n}\ln\left(\sqrt{n\pi}+o\left(\sqrt{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\ln\left(\sqrt{n\pi}\right)}{2n}+o\left(\frac{\ln\left(\sqrt{n\pi}\right)}{2n}\right)}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{\ln\left(\sqrt{n\pi}\right)}{2n}+o\left(\frac{\ln\left(\sqrt{n\pi}\right)}{2n}\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\omega_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\left(\sqrt{n\pi}\right)}{2n} = \frac{\ln\left(\sqrt{n}\right)+\ln\left(\sqrt{\pi}\right)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\left(\sqrt{n}\right)}{2n} = \frac{\ln(n)}{4n}.$$

En particulier, $\omega_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ puis $\frac{1}{2}\left(\pi - 2\omega_n \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}\left(\pi - 2\times 1\times\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D'autre part, pour n grand $\omega_n - 1 > 0$ et donc $0 < \frac{1}{\omega_n} < 1$ de sorte que $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$ existe. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\pi - 2\omega_n \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_n \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right) = \cos\left(\omega_n \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{1}{\omega_n^2}} = \sqrt{\frac{(\omega_n - 1)(\omega_n + 1)}{\omega_n^2}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\ln(n)\times 2}{4n}} = \sqrt{\frac{\ln(n)}{2n}}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\pi - 2\omega_n \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\ln(n)}{n}}.$$

