Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

1) Question préliminaire Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(p(n+1))^r(pn)!}{(p(n+1))!(np)^r} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{(pn+1)(pn+2)\dots(pn+p)}.$$

Par suite, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^p}$ puis $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. D'après la règle de d'Alembert, $R_a = +\infty$.

Pour tout $Z \in \mathbb{C}$, la série numérique de terme général $a_n Z^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Par suite, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série numérique de terme général $a_n (z^p)^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. On en déduit que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}$ a un rayon infini.

A. Equivalence entre $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ lorsque $r > 0$

2) Soit $x > 0$. φ_x est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour $t > 1$,

$$\begin{aligned}\varphi_x'(t) &= (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-r}(t-1)^{r-1} = ((1-r)(t-1)+rt)t^{-r}(t-1)^{r-1} = (t+r-1)t^{-r}(t-1)^{r-1} \\ &> rt^{-r}(t-1)^{r-1} > 0.\end{aligned}$$

Donc, l'application φ_x est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. φ_x réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\varphi_x([1, +\infty[) = \left[\varphi_x(1), \lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_x(t)\right[= [-x, +\infty[$ (car $\varphi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$). Puisque $0 \in [-x, +\infty[$, l'équation $\varphi_x(t) = 0$ a une solution et une seule, notée t_x, dans $[1, +\infty[$ et même $]1, +\infty[$ car $-x < 0$. De plus, φ_x étant strictement croissante sur $[1, +\infty[$, pour $t \in [1, t_x[$, on a $\varphi_x(t) < 0$ et pour $t \in]t_x, +\infty[$, on a $\varphi_x(t) > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_n(x) - u_{n-1}(x) &= \frac{n^r}{n!}x^n - \frac{(n-1)^r}{(n-1)!}x^{n-1} = -x^{n-1}\frac{n^r}{n!}\left(-x + \frac{(n-1)^r}{(n-1)!}\frac{n!}{n^r}\right) = -x^{n-1}\frac{n^r}{n!}\left(-x + n^{1-r}(n-1)^r\right) \\ &= -x^{n-1}\frac{n^r}{n!}\varphi_x(n).\end{aligned}$$

Si $1 \leqslant n \leqslant \lfloor t_x \rfloor$, alors $n \leqslant t_x$ puis $u_n(x) - u_{n-1}(x) \geqslant 0$ et si $n > \lfloor t_x \rfloor$, alors $n \geqslant \lfloor t_x \rfloor + 1 > t_x$ puis $u_n(x) - u_{n-1}(x) \leqslant 0$. Ainsi, la suite finie $(u_n(x))_{0\leqslant n\leqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et la suite $(u_n(x))_{n\geqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x > 0$, $\varphi_x(x+\alpha) = (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x\left[\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\dfrac{\alpha-1}{x}\right)^r - 1\right]$ puis

$$\begin{aligned}\varphi_x(x+\alpha) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left[\left(1+\frac{\alpha(1-r)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{(\alpha-1)r}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1\right] \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left[1+\frac{\alpha(1-r)+r(\alpha-1)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] \underset{x\to+\infty}{=} \alpha - r + o(1).\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(x+\alpha) = \alpha - r$.

Si $\alpha > r$, alors $\alpha - r > 0$ et donc $\varphi_x(x+\alpha) > 0$ pour x suffisamment grand. Par suite, si $\alpha > r$, $x + \alpha > t_x$ pour x suffisamment grand. De même, si $\alpha < r$, $x + \alpha < t_x$ pour x suffisamment grand.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $r + \varepsilon > r$ et $r - \varepsilon < r$. Pour x suffisamment grand, $x + r + \varepsilon > t_x$ et $x + r - \varepsilon < t_x$. Donc, il existe un réel $A > 0$ tel que, pour $x \geqslant A$, $-\varepsilon < t_x - x - r < \varepsilon$. Ceci montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} (t_x - x - r) = 0$.

4) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour $x \geqslant -k$, $\lfloor x \rfloor + k \in \mathbb{N}$ puis, en posant $p = \lfloor x \rfloor$,

$$\frac{u_{p+k}(x)}{u_p(x)} = \frac{(p+k)^r}{p^r} \times \frac{x^k}{(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}.$$

Puisque $x - 1 \leqslant p \leqslant x$, on a $p \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et en particulier $p \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. On en déduit que

$$\frac{u_{p+k}(x)}{u_p(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{p^r}{p^r} \times \frac{x^k}{p^k} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^k}{x^k} = 1.$$

Donc, pour tout entier relatif k, $u_{\lfloor x \rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=\lfloor x \rfloor-n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \displaystyle\sum_{i=\lfloor x \rfloor-n}^{\lfloor x \rfloor} \frac{u_i(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}} \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{i=\lfloor x \rfloor-n}^{\lfloor x \rfloor} 1 = n+1$. Par suite, pour x au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=\lfloor x \rfloor-n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}} \geqslant (n+1) - 1 = n$ ou encore $\displaystyle\sum_{i=\lfloor x \rfloor-n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant n u_{\lfloor x \rfloor}(x)$.

5) Montrons que $u_{\lfloor x \rfloor}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$. Soient $\varepsilon > 0$ puis $n = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ de sorte que $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Pour x au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned}0 \leqslant u_{\lfloor x \rfloor}(x) &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=\lfloor x \rfloor-n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=\lfloor x \rfloor-n}^{\lfloor x \rfloor} \frac{i^r}{i!} x^i \\ &\leqslant \varepsilon x^r \sum_{i=\lfloor x \rfloor-n}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x^i}{i!} \leqslant \varepsilon x^r \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \varepsilon x^r e^x.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \geqslant A$, $0 \leqslant \dfrac{u_{\lfloor x \rfloor}(x)}{x^r e^x} \leqslant \varepsilon$. Ceci montre que $u_{\lfloor x \rfloor}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$.

Mais alors, pour k entier relatif donné, $u_{\lfloor x \rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$.

Puisque $t_x - x$ tend vers r quand x tend vers $+\infty$ et que $\lfloor r \rfloor - 1 < r < \lfloor r \rfloor + 1$, pour x suffisamment grand, $\lfloor r \rfloor - 1 \leqslant t_x - x \leqslant \lfloor r \rfloor + 1$. Mais alors, pour x suffisamment grand, $t_x - \lfloor x \rfloor \geqslant t_x - x \geqslant \lfloor r \rfloor - 1$ et aussi $t_x - \lfloor x \rfloor \leqslant t_x - (x-1) \leqslant \lfloor r \rfloor + 1 + 1 = \lfloor r \rfloor + 2$. Donc, pour x suffisamment grand, $t_x - \lfloor x \rfloor$ est un certain entier compris au sens large entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$ ou encore, pour x suffisamment grand, $M_x = u_{t_x} = u_{\lfloor x \rfloor + i}$ où i est un entier compris au sens large entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

Pour x suffisamment grand, M_x est l'un des 4 nombres positifs $u_{\lfloor x \rfloor+i}$, $\lfloor r \rfloor - 1 \leqslant i \leqslant \lfloor r \rfloor + 2$ et donc $0 \leqslant M_x \leqslant \displaystyle\sum_{i=\lfloor r \rfloor-1}^{\lfloor r \rfloor+2} u_{\lfloor x \rfloor+i}$.

Chacun des 4 termes est négligeable devant $x^r e^x$ quand x tend vers $+\infty$ et donc

$$M_x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r e^x\right).$$

6) Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} D_n\left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right) &= \sum_{n=1}^{N} D_n u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{N} D_n u_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{N} D_n u_n(x) \\ &= D_1 u_0(x) + \sum_{n=1}^{N-1} \left(D_{n+1} - D_n\right) u_n(x) - D_N u_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n u_n(x) - D_N u_N(x) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n^r}{n!} (zx)^n - D_N u_N(x)\end{aligned}$$

Ensuite, puisque $|z| = 1$ et $z \neq 1$, $|D_N| = \left|\dfrac{1 - z^N}{1 - z}\right| \leqslant \dfrac{1 + |z|^N}{|1 - z|} = \dfrac{2}{|1 - z|}$. Donc, la suite $(D_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Puisque d'autre part, $u_N(x)$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ en tant que terme général d'une série convergente, on en déduit que

$D_N u_N(x)$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. On en déduit encore que la série de terme général $D_n\left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}(zx)^n = S_{r,1}(zx).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
|S_{r,1}(zx)| &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n|\,|u_{n-1}(x) - u_n(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \\
&\leqslant \frac{2}{|1-z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| = \frac{2}{|1-z|}\left(\sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} (-u_{n-1}(x) + u_n(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor+1}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x))\right) \\
&= \frac{2}{|1-z|}\left(\left(-u_0(x) + u_{\lfloor t_x \rfloor}\right) + \left(u_{\lfloor t_x \rfloor} - 0\right)\right) \text{ (!série télescopique)} \\
&\leqslant \frac{2}{|1-z|} \times 2u_{\lfloor t_x \rfloor} = \frac{4M_x}{|1-z|}
\end{aligned}$$

Puisque $M_x \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$, on a encore $S_{r,1}(zx) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$.

7) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}\left(\zeta^k x\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \left(\sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k\right) \text{ (somme de p séries convergentes).}$$

Si $n \in p\mathbb{Z}$, alors $\zeta^n = 1$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k = p$. Si $n \notin p\mathbb{Z}$, alors $\zeta^n \neq 1$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k = \frac{1-\zeta^{np}}{1-\zeta^n} = 0$ car $\zeta^p = 1$. Par suite,

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}\left(\zeta^k x\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(pm)^r}{(pm)!} x^{pm} p = pS_{r,p}(x).$$

Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\left|\zeta^k\right| = 1$ et $\zeta^k \neq 1$. D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}\left(\zeta^k x\right) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^r e^x\right)$ et donc

$$pS_{r,p}(x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}\left(\zeta^k x\right) \underset{x \to +\infty}{=} S_{r,1}(x) + o\left(x^r e^x\right).$$

Donc, si $S_{r,1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r e^x$ ou encore si $S_{r,1}(x) \underset{x \to +\infty}{=} x^r e^x + o\left(x^r e^x\right)$, alors $S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{=} \dfrac{1}{p} x^r e^x + o\left(x^r e^x\right)$ ou encore $S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^r e^x}{p}$. De même, si $S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^r e^x}{p}$, alors $S_{r,1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r e^x$.

On a montré que les énoncés $(H_{r,1})$ et $(H_{r,p})$ sont équivalents quand $r > 0$.

B. Une démonstration probabiliste

8) Soit $\alpha > 0$. Soit $x > 0$. Puisque $X_x \sim \mathscr{P}(x)$, on sait $E(X_x) = V(X_x) = x$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}
0 \leqslant P\left(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}\right) &\leqslant P\left(|X_x - x| \geqslant \alpha x^{2/3}\right) = P\left(|X_x - E(X_x)| \geqslant \alpha x^{2/3}\right) \\
&\leqslant \frac{V(X_x)}{\left(\alpha x^{2/3}\right)^2} = \frac{x}{\alpha^2 x^{4/3}} = \frac{1}{\alpha^2 x^{1/3}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{1}{\alpha^2 x^{1/3}} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P\left(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}\right) = 0$.

9) • Soit $x > 1$. Alors $1 - x^{-1/3} > 0$. Soit $\omega \in \Omega$. $Z_x(\omega)$ est un réel positif.
Si $Z_x(\omega) < 1 - x^{-1/3}$, alors $0 \leqslant A_x(\omega) = Z_x(\omega)^r \leqslant \left(1 - x^{-1/3}\right)^r$ (par croissance de la fonction $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}^+$ car $r > 0$).
Si $Z_x(\omega) \geqslant 1 - x^{-1/3}$, alors $A_x(\omega) = 0$.

Ainsi, $0 \leqslant A_x \leqslant \left(1-x^{-1/3}\right)^r 1_{\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)}$. Par croissance et linéarité de l'espérance,

$$0 \leqslant E\left(A_x\right) \leqslant \left(1-x^{-1/3}\right)^r E\left(1_{Z_x<1-x^{-1/3}}\right) = \left(1-x^{-1/3}\right)^r P\left(Z_x < 1-x^{-1/3}\right) \quad (*).$$

Ceci montre déjà que A_x est d'espérance finie. Ensuite, pour tout $\omega \in \Omega$, $Z_x(\omega) < 1-x^{-1/3} \Leftrightarrow \dfrac{X_x(\omega)}{x} < 1-x^{-1/3} \Leftrightarrow X_x(\omega)-x < -x^{2/3} \Rightarrow |X_x(\omega)-x| > x^{2/3}$. Donc, $\left\{Z_x(\omega) < 1-x^{-1/3}\right\} \subset \left\{|X_x(\omega)-x| > x^{2/3}\right\}$ puis $P\left(Z_x < 1-x^{-1/3}\right) \leqslant P\left(|X_x(\omega)-x| > x^{2/3}\right)$. D'après la question précédente, $P\left(|X_x(\omega)-x| > x^{2/3}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et donc $P\left(Z_x < 1-x^{-1/3}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. D'autre part, $\left(1-x^{-1/3}\right)^r$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ et donc $\left(1-x^{-1/3}\right)^r P\left(Z_x < 1-x^{-1/3}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. $(*)$ et le théorème des gendarmes montrent alors que

$$\lim_{x\to+\infty} E\left(A_x\right) = 0.$$

• Soit $x > 1$. Soit $\omega \in \Omega$. Si $|Z_x(\omega)-1| \leqslant x^{-1/3}$, alors $0 < 1-x^{-1/3} \leqslant Z_x(\omega) \leqslant 1+x^{-1/3}$ puis $\left(1-x^{-1/3}\right)^r \leqslant B_x(\omega) = Z_x(\omega)^r \leqslant \left(1+x^{-1/3}\right)^r$. Si $|Z_x(\omega)-1| > x^{-1/3}$, $B_x(\omega) = 0$.
Donc, $\left(1-x^{-1/3}\right)^r 1_{\left(|Z_x-1|\leqslant x^{-1/3}\right)} \leqslant B_x \leqslant \left(1+x^{-1/3}\right)^r 1_{\left(|Z_x-1|\leqslant x^{-1/3}\right)}$. Ceci montre déjà que B_x est d'espérance finie. Ensuite, par croissance de l'espérance et en tenant compte de $E\left(1_{(|Z_x-1|)}\right) = P\left(|Z_x-1| \leqslant x^{-1/3}\right)$, pour $x > 1$,

$$\left(1-x^{-1/3}\right)^r P\left(|Z_x-1| \leqslant x^{-1/3}\right) \leqslant E\left(B_x\right) \leqslant \left(1+x^{-1/3}\right)^r P\left(|Z_x-1| \leqslant x^{-1/3}\right).$$

Ensuite, $\left\{|Z_x-1| \leqslant x^{-1/3}\right\} = \left\{|X_x-x| \leqslant x^{2/3}\right\}$ et donc $P\left(|Z_x-1| \leqslant x^{-1/3}\right) = 1 - P\left(|X_x-x| > x^{2/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$ (d'après la question 8). Par suite, $\left(1-x^{-1/3}\right)^r P\left(|Z_x-1| \leqslant x^{-1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$ et $\left(1+x^{-1/3}\right)^r P\left(|Z_x-1| \leqslant x^{-1/3}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} E\left(B_x\right) = 1.$$

10) • $|Y_{N,x}| \leqslant \displaystyle\prod_{k=0}^{N-1}(X_x+k)$. $\displaystyle\prod_{k=0}^{N-1}(X_x+k)$ est une combinaison linéaire des variables positives X_x^i, $0 \leqslant i \leqslant N-1$. Pour $i \in [\![0, N-1]\!]$, d'après la formule de transfert

$$E\left(X_x^i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^i \times P\left(X_x = n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^i \times \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

La série numérique de terme général $\dfrac{n^i x^n}{n!}e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$, converge car $\dfrac{n^i x^n}{n!}e^{-x} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, chaque X_x^i est d'espérance finie puis $\displaystyle\prod_{k=0}^{N-1}(X_x+k)$ est d'espérance finie en tant que combinaison linéaire de variables d'espérance finie. Mais alors, $Y_{N,x}$ est d'espérance finie.

• D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
E\left(Y_{N,x}\right) &= \sum_{n>x+x^{2/3}} \prod_{k=0}^{N-1}(n-k) \times P\left(X_x = n\right) = \sum_{n>x+x^{2/3},\ n\geqslant N} \left(\prod_{k=0}^{N-1}(n-k) \times \frac{x^n}{n!}e^{-x}\right) \\
&= \sum_{n>x+x^{2/3},\ n\geqslant N} \frac{n(n-1)\ldots(n-N+1)}{n!}x^n e^{-x} = \sum_{n>x+x^{2/3},\ n\geqslant N} \frac{1}{(n-N)!}x^n e^{-x} \\
&= \sum_{m+N>x+x^{2/3}} \frac{1}{m!}x^{m+N}e^{-x} \text{ (en posant } m = n-N) \\
&= x^N \sum_{m>x+x^{2/3}-N} \frac{x^m e^{-x}}{m!} = x^N \sum_{m>x+x^{2/3}-N} P\left(X_x = n\right) \\
&= x^N P\left(X_x > x + x^{2/3} - N\right).
\end{aligned}$$

• Pour $x \geqslant (2N)^{3/2}$, on a $\dfrac{1}{2}x^{2/3} \geqslant N$ puis $x + x^{2/3} - N \geqslant x + x^{2/3} - \dfrac{1}{2}x^{2/3} = x + \dfrac{1}{2}x^{2/3}$. Donc, pour $x \geqslant (2N)^{3/2}$, on a $\left\{X_x > x + x^{2/3} - N\right\} \subset \left\{X_x > x + \dfrac{1}{2}x^{2/3}\right\} \subset \left\{|X_x - x| > \dfrac{1}{2}x^{2/3}\right\}$ puis $P\left(X_x > x + x^{2/3} - N\right) \leqslant P\left(|X_x - x| > \dfrac{1}{2}x^{2/3}\right)$. D'après la question 8), $\lim\limits_{x\to+\infty} P\left(|X_x - x| > \dfrac{1}{2}x^{2/3}\right) = 0$ et donc $P\left(X_x > x + x^{2/3} - N\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$. On en déduit que

$$E\left(Y_{N,x}\right) = x^N P\left(X_x > x + x^{2/3} - N\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^N\right).$$

11) Posons $Q_0 = 1$ puis pour $k \in [\![1, N]\!]$, posons $Q_k = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X - j)$. $(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_N[X]$ de degrés deux à deux distincts. Donc, $(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_N[X]$. De plus, $\mathrm{card}\,(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant N} = N + 1 = \dim\left(\mathbb{R}_N[X]\right) < +\infty$ et donc $(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

Par suite, il existe des réels a_0, a_1, ..., a_N, tels que $X^N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k Q_k$. En évaluant en 0, on obtient $a_0 = 0$ (car $N > 0$) et donc $X^N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k Q_k$. On en déduit que

$$1_{\left(X_x > x + x^{2/3}\right)} X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k 1_{\left(X_x > x + x^{2/3}\right)} Q_k\left(X_x\right) = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{k,x}.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par x^N et en tenant compte de $1_{\left(X_x > x + x^{2/3}\right)} = 1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)}$, on a encore

$$1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^N = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k Y_{k,x}}{x^N},$$

et donc

$$E\left(1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^N\right) = \frac{1}{x^N} \sum_{k=1}^{N} a_k E\left(Y_{k,x}\right).$$

Maintenant, pour $1 \leqslant k \leqslant N$, $E\left(Y_{k,x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^k\right)$ et en particulier, pour $1 \leqslant k \leqslant N$, $E\left(Y_{k,x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^N\right)$ puis $\dfrac{1}{x^N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k E\left(Y_{k,x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$. Ceci montre que

$$\lim_{x\to+\infty} E\left(1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^N\right) = 0.$$

12) Soit $N = \lfloor r \rfloor + 1$. N est un entier strictement positif tel que $N \geqslant r$.
Vérifions que $1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^r \leqslant 1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^N$.
Soit $\omega \in \Omega$. Si $Z_x(\omega) > 1 + x^{-1/3}$, en particulier $Z_x(\omega) \geqslant 1$ puis $Z_x(\omega)^r \leqslant Z_x(\omega)^N$ (par croissance de la fonction $t \mapsto Z_x(\omega)^t$ sur $\mathbb{R}$) et finalement $1_{\left(Z_x(\omega) > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x(\omega)^r \leqslant 1_{\left(Z_x(\omega) > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x(\omega)^N$.
Si $Z_x(\omega) \leqslant 1 + x^{-1/3}$, les deux membres sont nuls et l'inégalité est encore vraie.
On a montré que $1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^r \leqslant 1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^N$. Mais alors, par croissance de l'espérance,

$$0 \leqslant E\left(1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^r\right) \leqslant E\left(1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^N\right)$$

et le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty} E\left(1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^r\right) = 0.$$

Ensuite, $Z_x^r = 1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^r + 1_{\left(Z_x < 1 - x^{-1/3}\right)} Z_x^r + 1_{\left(|Z_x - 1| \leqslant x^{-1/3}\right)} Z_x^r = 1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^r + A_x + B_x$ puis

$$E\left(Z_x^r\right) = E\left(1_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^r\right) + E\left(A_x\right) + E\left(B_x\right).$$

D'après les questions 9) et 11),

$$\lim_{x\to+\infty} E\left(Z_x^r\right) = 1.$$

D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}E\left(Z_x^r\right) &= \frac{1}{x^r}E\left(X_x^r\right) = \frac{1}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty} n^r P\left(X_x = n\right) = \frac{1}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty} n^r \frac{x^n e^{-x}}{n!}\\ &= \frac{1}{x^r e^x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n = \frac{S_{r,1}(x)}{x^r e^x}.\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} E\left(Z_x^r\right) = 1$, on a encore $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S_{r,1}(x)}{x^r e^x} = 1$ puis $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$. On a montré la validité de l'énoncé $H_{r,1}$.

13) Soit $x\in\mathbb{R}$. En posant $n = m+1$, on obtient

$$S_{r,p}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(pn)^r}{(pn)!}x^{np} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(p(m+1))^r}{(p(m+1))!}x^{(m+1)p} = x^p\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}x^{np}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $b_n = \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}$. (b_n) est une suite strictement positive.

$$b_n = \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} = \frac{(p(n+1))^r}{(pn)!\times(pn+1)(pn+2)\dots(pn+p)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(pn)^r}{(pn)!\times(pn)^p} = \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $a_0 = 0$ et pour $n\geqslant 1$, $a_n = \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!}$. $R_b = +\infty$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{} b_n$. Donc $R_a = +\infty$ et de plus, d'après le résultat admis par l'énoncé,

$$S_{p,r}\left(y^{1/p}\right) = y\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}y^n \underset{y\to+\infty}{\sim} y\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!}y^n = yS_{r-p,p}\left(y^{1/p}\right).$$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S_{p,r}(x)}{x^p S_{r-p,p}(x)} = \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{S_{p,r}\left(y^{1/p}\right)}{yS_{r-p,p}\left(y^{1/p}\right)} = 1$ et donc

$$S_{p,r}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^p S_{r-p,p}(x).$$

Supposons alors $S_{p,r}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^r e^x}{p}$. On en déduit que

$$S_{r-p,p}(x) = \frac{S_{p,r}(x)}{x^p} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^r e^x}{px^p} = \frac{x^{r-p}e^x}{p}.$$

Donc, $(H_{r,p})$ implique $(H_{r-p,p})$.

On sait déjà que pour $r>0$ et $p\in\mathbb{N}^*$, $(H_{r,p})$ est valide. Soient $r\leqslant 0$ et $p\in\mathbb{N}^*$. Il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $r+kp>0$. $(H_{r+kp,p})$ est valide et donc $\left(H_{r+(k-1)p,p}\right)$, $\left(H_{r+(k-2)p,p}\right)$, ..., $(H_{r,p})$ sont valides. En particulier, $(H_{r,p})$ est valide

C. Application à l'équation d'Airy

14) Question préliminaire. Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}v_n - v_{n-1} &= \ln(n) + x(\ln(n)-\ln(n-1)) - \ln(x+n) = -x\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Donc, la série de terme général $v_n - v_{n-1}$, $n\geqslant 2$, converge. On sait qu'il en est de même de la suite (v_n). Notons $\ell(x)$ la limite de la suite (v_n) puis posons $\Gamma(x) = e^{\ell(x)} > 0$.

Pour $n\geqslant 2$, $v_n = \ln\left(\dfrac{n!n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}\right)$. Donc $\ln\left(\dfrac{n!n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ell(x)+o(1)$ puis $\dfrac{n!n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\ell(x)+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\ell(x)} = \Gamma(x)$ et finalement,

$$\prod_{k=0}^{n}(x+k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!n^x}{\Gamma(x)}.$$

15) Les deux fonctions $a\ :\ t\mapsto 0$ et $b\ :\ t\mapsto -t$ sont continues sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy, il existe une solution f et une seule de (Ai) : $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$, sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.

16) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $R_a>0$. Pour tout réel t de $]-R_a,R_a[$, posons $g(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$. g est deux fois dérivable sur $]-R_a,R_a[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour $t\in\,]-R_a,R_a[$

$$\begin{aligned}g''(t)-tg(t)&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n-\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}t^n\\&=2a_2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1}\right)t^n.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, $(\forall t\in\,]-R_a,R_a[,\ g''(t)-tg(t)=0$ et $g(0)=1$ et $g'(0)=0)\Leftrightarrow$ $(a_0=1$ et $a_1=0$ et $2a_2=0$ et $\forall n\geqslant 1,\ (n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1}=0)$.
Ceci équivaut à $(a_0=1,\ a_1=a_2=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+3)(n+2)a_{n+3}-a_n=0)$ puis à $\left(\forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=a_{3p+2}=0 \text{ et } a_0=1 \text{ et } \forall k\in\mathbb{N}^*,\ a_{3p}=\dfrac{a_{3(p-1)}}{(3p)(3p-1)}\right)$ ou enfin à

$$\left(\forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=a_{3p+2}=0 \text{ et } a_0=1 \text{ et } \forall p\in\mathbb{N}^*,\ a_{3p}=\frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(3k)(3k-1)}\right).$$

Tout ceci est fait sous l'hypothèse $R_a>0$. Maintenant, la règle de d'Alembert pour les séries numériques montre que la série de terme général a_nx^n converge pour tout réel x et donc que $R_a=+\infty$. Ceci valide les calculs précédents sur $]-\infty,+\infty[$: la fonction $g\ :\ t\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$ est solution de (Ai) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g(0)=1$ et $g'(0)=0$.

Par unicité d'une telle solution, on a $f=g$ et donc : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k)(3k-1)}t^{3n}$.

17) D'après la question 14),

$$\begin{aligned}a_{3n}&=\frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k)(3k-1)}=\frac{1}{9^nn!\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}+k\right)}=\frac{1}{9^nn!\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}+(k+1)\right)}\\&=\frac{n+\dfrac{2}{3}}{9^nn!\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(k+\frac{2}{3}\right)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)}{9^nn!n^{2/3}n!}=\frac{n^{1/3}\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)}{9^n(n!)^2}.\end{aligned}$$

Ensuite, d'après la formule de Stirling,

$$\frac{\dfrac{n^{1/3}\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)}{9^n(n!)^2}}{n^{-1/6}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}\dfrac{1}{(2n)!}}=\frac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n}}\frac{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}2n\pi}=1$$

et donc $a_{3n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n^{1/3}\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)}{9^n(n!)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^{-1/6}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}\dfrac{1}{(2n)!}$.

18) Comme à la question 13, on en déduit que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/6}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}t^{3n} = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)2^{1/6}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)^{-1/6}}{(2n)!}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right)^{2n} = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)2^{1/6}}{\sqrt{\pi}}S_{-\frac{1}{6},2}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right)$$

$$\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)2^{1/6}}{\sqrt{\pi}}\frac{\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right)^{-1/6}\exp\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right)}{2} = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)3^{1/6}}{2\sqrt{\pi}}t^{-1/4}\exp\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right).$$

