Epreuve de Mathématiques 2 PSI

Question de cours :

1) Théorème de Cauchy. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soient $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, deux applications continues sur I. Soit (S) le système différentiel $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.
Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il existe une solution de (S) sur I et une seule vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$.

2)

2.1. $j = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Donc, $|j| = 1$ et $\arg(j) = \dfrac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$.

2.2. $j^3 = e^{2i\pi} = 1$. Par suite, pour $k \in \mathbb{N}$, $j^{3k} = \left(j^3\right)^k = 1$ puis $j^{3k+1} = j$ et $j^{3k+2} = j^2$.
Ensuite, puisque $j \neq 1$, $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$. Par suite, pour $p \in \mathbb{N}$,

- $s_{3p} = 1 + j^{3p} + j^{6p} = 1 + 1 + 1 = 3$,
- $s_{3p+1} = 1 + j^{3p+1} + j^{6p+2} = 1 + j + j^2 = 0$,
- $s_{3p+2} = 1 + j^{3p+2} + j^{6p+4} = 1 + j^2 + j = 0$.

2.3. Le déterminant du système proposé est

$$\Delta = \text{Van}\left(1, j, j^2\right) = (j - 1)\left(j^2 - 1\right)\left(j^2 - j\right) \neq 0.$$

Le système proposé admet un triplet solution et un seul. Il est clair que cette solution est $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

3) $\det(V_\gamma) = \displaystyle\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (\gamma_j - \gamma_i)$.

Partie 1

1) S'il existe $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\gamma_i = \gamma_j$, alors les colonnes C_{i+1} et C_{j+1} de $\det(V_\gamma)$ sont les mêmes. On en déduit que $\det(V_\gamma) = 0$.

2) P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. L'égalité $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j$ fournit les égalités : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_i^{j-1} = 0$ ou encore $P(\gamma_i) = 0$. Ainsi, P est un polynôme de degré au plus $n-1$ admettant au moins n racines deux à deux distinctes. On en déduit que $P = 0$ ou encore : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_j = 0$.

Ceci montre que la famille des n lignes de V_γ est une famille libre. Puisque V_γ est une matrice carrée, V_γ est une matrice inversible. Mais alors, $\det(V_\gamma) \neq 0$.

3)

3.1. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\Psi^{(i)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^i \psi_k$.

3.2. Supposons de plus que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k = 0$. Alors, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\Psi^{(i)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^i \psi_k = 0$. En évaluant en 0, on obtient

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \ \sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^i = 0 \quad (S).$$

Le déterminant de ce système de n équations linéaires à n inconnues est $\det(V_\gamma)$. Ce déterminant est non nul d'après la question précédente. Le système (S) est un système de Cramer homogène. Le système (S) admet une solution et une seule, à savoir $(0, \dots, 0)$.

Ainsi, $\forall (m_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$, $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ m_k = 0\right)$. Donc, la famille $(\psi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre.

Partie 2

1)

1.1. Soit f une fonction trois dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1). Soit $g = f + f' + f''$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = f' + f'' + f^{(3)} = f' + f'' + f = g$. g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$.

1.2. Les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad (E_2)$.

1.3. Ainsi, si f est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$, alors f est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation de la forme $y'' + y' + y = \alpha e^x$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Résolvons l'équation (E_1') : $y'' + y' + y = \alpha e^x$. L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est : (E_c) : $z^2 + z + 1 = 0$. (E_c) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$: $r_1 = j$ et $r_2 = j^2$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \beta e^{jx} + \gamma e^{j^2 x}$, $(\beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2$. Une solution particulière de l'équation (E_1') sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{\alpha}{3} e^x$. Les solutions de (E_1') sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\alpha}{3} e^x + \beta e^{jx} + \gamma e^{j^2 x}$, $(\beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2$.

Ainsi, toute solution complexe de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{jx} + \gamma e^{j^2 x}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$.
Réciproquement, soit f une telle fonction. Alors, f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f^{(3)}(x) = \alpha e^x + \beta j^3 e^{jx} + \gamma j^6 e^{j^2 x} = \alpha e^x + \beta e^{jx} + \gamma e^{j^2 x} = f(x).$$

Les solutions complexes de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{jx} + \gamma e^{j^2 x}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$.

2)

2.1. Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ X & -1 \end{vmatrix} = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)\left(X - j^2\right).\end{aligned}$$

χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Par contre, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples et donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

2.2. Soit $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $U_1 \neq 0$ et $AU_1 = U_1$. Donc, U_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

Soit $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$. $AU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = jU_2$. Donc, U_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre j.

Soit $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. En conjuguant l'égalité $AU_2 = jU_2$, on obtient $AU_3 = j^2 U_3$. Donc, U_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre j^2.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. D'après ce qui précède, P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = \text{diag}\left(1, j, j^2\right)$.

Soient X : : $\mathbb{R} \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C}$ puis $Y = P^{-1}$ de sorte que $X = PY$. En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$$X' = AX \Leftrightarrow (PY)' = APY \Leftrightarrow PY' = APY \Leftrightarrow Y' = P^{-1}APY$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(1, j, j^2\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_1 \\ y_2' = jy_2 \\ y_3' = j^2 y_3 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 / \ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{jt} \\ \gamma e^{j^2 t} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 / \ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{jt} \\ \gamma e^{j^2 t} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 / \ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{jt} + \gamma e^{j^2 t} \\ \alpha e^t + \beta j e^{jt} + \gamma j^2 e^{j^2 t} \\ \alpha e^t + \beta j^2 e^{jt} + \gamma j e^{j^2 t} \end{pmatrix}.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ du système $X' = AX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{jt} + \gamma e^{j^2 t} \\ \alpha e^t + \beta j e^{jt} + \gamma j^2 e^{j^2 t} \\ \alpha e^t + \beta j^2 e^{jt} + \gamma j e^{j^2 t} \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$.

2.3. Soient f une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ puis $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$. X est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$X' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix} = AX.$$

En particulier, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que pour tout t réel, $X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{jt} + \gamma e^{j^2 t} \\ \alpha e^t + \beta j e^{jt} + \gamma j^2 e^{j^2 t} \\ \alpha e^t + \beta j^2 e^{jt} + \gamma j e^{j^2 t} \end{pmatrix}$ et en particulier, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que pour tout t réel, $f(t) = \alpha e^t + \beta e^{jt} + \gamma e^{j^2 t}$. Réciproquement, comme à la question 1.3 de cette partie, de telles fonctions conviennent.

3)

3.1. Pour tout réel x, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. En particulier, pour tout réel x, la suite $\left(\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On sait alors que le rayon de convergence de la série entière proposée est $R = +\infty$.

3.2. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence. Donc ici, la fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.3. De plus, les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Donc, pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n\, x^{3n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

Ensuite, pour tout réel x, $\varphi''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$ puis $\varphi^{(3)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \varphi(x)$.

On en déduit encore que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x, $\varphi^{(3p)}(x) = \varphi(x)$, $\varphi^{(3p+1)}(x) = \varphi'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$ et $\varphi^{(3p+2)}(x) = \varphi''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$.

3.4. 1ère solution. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^x + e^{jx} + e^{j^2 x} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(1 + j^k + j^{2k}\right) x^k \\ &= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \text{ (d'après la question de cours 2.1).} \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x,

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{jx} + e^{j^2x}\right) = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

2ème solution. $\varphi^{(3)} = \varphi$. Donc, il existe trois complexes a, b et c tels que, pour tout réel x, $\varphi(x) = ae^x + be^{jx} + ce^{j^2x}$ d'après la question 1.3 de cette partie.

Ensuite, les premiers coefficients du développement en série entière de φ fournissent $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$. Donc, a, b et c sont solutions du système de la question de cours 2.3. Dans cette question, on a obtenu $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ et on retrouve

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{jx} + e^{j^2x}\right) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

3.5. Pour tout réel x,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = \varphi'(x) = \frac{1}{3}\left(e^x - e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

3.6. Pour tout réel x, $\varphi(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^9}{9!} + \dots$ et $\varphi(-x) = 1 - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} - \dfrac{x^9}{9!} + \dots$ En additionnant membre à membre, on obtient pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\theta(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x)) &= \frac{1}{6}\left(e^x + 2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-x} + 2e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).\end{aligned}$$

Partie 3

1)

1.1. $y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y' = A_\alpha Y.$

1.2. Soit y un élément de $\mathscr{S}_\alpha$. Montrons par récurrence que pour tout $p \geqslant n$, y est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- y est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $p \geqslant n$. Supposons y p fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $y^{(k)}$ est dérivable $p-(n-1)$ fois sur $\mathbb{R}$ (au moins) puis $y^{(n)}$ est dérivable $p-n+1$ fois sur $\mathbb{R}$ ou encore y est dérivable $p+1$ fois sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, y est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1.3. $\mathscr{S}_\alpha \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ d'après la question précédente. $0 \in \mathscr{S}_\alpha$ et si $(f, g) \in \mathscr{S}_\alpha^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} + \mu \sum_{k=0}^{n-1} a_k g^{(k)} = 0,$$

puis $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_\alpha$. On a montré que $\mathscr{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

1.4. Soit $\begin{array}{cccc}\Phi : & \mathscr{S}_\alpha & \to & \mathbb{K}^n \\ & y & \mapsto & \left(y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)\right)\end{array}$. Φ est une application linéaire et Φ est bijective d'après le théorème de CAUCHY rappelé à la question de cours 1. Donc, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit que $\dim(\mathscr{S}_\alpha) = \dim(\mathbb{K}^n) = n$.

2) Si $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, (E_α) s'écrit $y^{(n)} = y$.

3) Pour $r \in \mathbb{C}$, notons $\varphi_r \ : \ x \mapsto e^{rx}$. Soit $r \in \mathbb{C}$. $(\varphi_r)^{(n)} = \varphi_r \Leftrightarrow r^n \varphi_r = \varphi_r \Leftrightarrow r^n = 1$ (car $\varphi_r \neq 0$).
L'équation $z^n = 1$ admet n solutions deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$, à savoir les nombres $\gamma_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\varphi_r \in \mathscr{S}_\alpha \Leftrightarrow r \in \{\gamma_k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

4) Chacune des n fonctions $\psi_k \ : \ x \mapsto e^{\gamma_k x}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, est un élément de $\mathscr{S}_\alpha$. D'autre part, puis les nombres γ_k, $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts, la famille $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathscr{S}_\alpha$ d'après la question 3.2 de la partie 1.

Puisque $\operatorname{card}(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = n = \dim(\mathscr{S}_\alpha) < +\infty$, $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ est une base de $\mathscr{S}_\alpha$.

5)

5.1. La dérivation est linéaire. D'autre part, si $y \in \mathscr{S}_\alpha$,

$$(y')^{(n)} = \left(y^{(n)}\right)' = y'$$

et donc $d(y) = y' \in \mathscr{S}_\alpha$. Donc, $d \in \mathscr{L}(\mathscr{S}_\alpha)$.

5.2. Soit $y \in \mathscr{S}_\alpha$. $y \in \operatorname{Ker}(d) \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y^{(n)} = 0 \Rightarrow y = 0$ (car $y(n) = y$). Donc, $\operatorname{Ker}(d) = \{0\}$. Puisque $\dim(\mathscr{S}_\alpha) < +\infty$, on en déduit que $d \in GL(\mathscr{S}_\alpha)$.

5.3. Une base de $\mathscr{S}_\alpha$ est $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $d(\psi_k) = \gamma_k \psi_k$. $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ est donc une base de $\mathscr{S}_\alpha$ constituée de vecteurs propres de d. On en déduit que d est diagonalisable.

Partie 4

1) Soit $(f, g) \in (\mathscr{S}_\alpha)^2$. Puisque les éléments de $\mathscr{S}_\alpha \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, f et g sont dans $\mathscr{S}_\alpha$ et donc $f^{(p)}$ et $g^{(p)}$ sont dans $\mathscr{S}_\alpha$ d'après la question 5 de la partie précédente. D'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\begin{aligned} e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right) &\underset{t\to+\infty}{=} e^{-3t}\left(O\left(e^t\right)O\left(e^t\right) + O\left(e^t\right)O\left(e^t\right)\right) \underset{t\to+\infty}{=} e^{-3t}O\left(e^{2t}\right) \\ &\underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-t}\right) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

De même, $e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right) \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right)$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $(f|g)$.

2) • D'après la question précédente, $(\ |\ )$ est une application de $\mathscr{S}_\alpha^2$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(f, g) \in (\mathscr{S}_\alpha)^2$. $(f|g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(g(t)f(t) + g^{(p)}(t)f^{(p)}(t)\right) dt = (g|f)$.
Donc, $(\ |\ )$ est symétrique.

• Soient $(f_1, f_2, g) \in (\mathscr{S}_\alpha)^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} ((\lambda f_1 + \mu f_2)|g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left((\lambda f_1(t) + \mu f_2(t))\, g(t) + \left(\lambda f_1^{(p)}(t) + \mu f_2^{(p)}(t)\right) g^{(p)}(t)\right) dt \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f_1(t)g(t) + f_1^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right) dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f_2(t)g(t) + f_2^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right) dt \\ &\text{(combinaison linéaire d'intégrales convergentes)} \\ &= \lambda\,(f_1|g) + \mu\,(f_2|g). \end{aligned}$$

Donc, $(\ |\ )$ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Soit $f \in \mathscr{S}_\alpha$. $(f|f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f^2(t) + \left(f^{(p)}\right)^2(t)\right) dt \geqslant 0$ et de plus

$$
\begin{aligned}
(f|f) = 0 &\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f^2(t) + \left(f^{(p)}\right)^2(t)\right)\,dt = 0 \\
&\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-3|t|}\left(f^2(t) + \left(f^{(p)}\right)^2(t)\right) = 0 \text{ (fonction, continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
&\Rightarrow f^2 + \left(f^{(p)}\right)^2 = 0 \Rightarrow f^2 = 0 \text{ (somme nulle de deux réels positifs)} \\
&\Rightarrow f = 0.
\end{aligned}
$$

Donc, $(\ |\ )$ est définie, positive.

En résumé, $(\ |\ )$ est une application forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur $\mathscr{S}_\alpha$ et donc $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur $\mathscr{S}_\alpha$.

3) Soit $(f, g) \in S_1 \times S_2$.

$$
(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f(t)(-g(t))\right)\,dt = 0.
$$

Donc, $S_2 \subset S_1^\perp$. De plus, d'après la question 1.4 de la partie 3, $\dim(S_2) = p = 2p - p = \dim(\mathscr{S}_\alpha) - \dim(S_1) = \dim\left(S_1^\perp\right) < +\infty$. On en déduit que $S_2 = S_1^\perp$.

4)

4.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(4)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(4k)(4k-1)(4k-2)(4k-3)}{(4k)!}x^{4k-4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4(k-1))!}x^{4(k-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!}x^{4k} = f(x)$. Donc, $f^{(4)} = f$. $p = 2$ et $\alpha = (1, 0, 0, 0)$ conviennent.

4.2. Soit $f_1\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(x)$ et $f_2\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\cos(x)$.

Pour tout réel x, $f_1(x) + f_2(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = f(x)$. De plus, $f_1 \in S_1$ et $f_2 \in S_2 = S_1^\perp$. Par unicité de la décomposition, le projeté orthogonal de f sur S_1 est $f_1\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{ch}(x)$ et le projeté orthogonal de f sur S_2 est $f_2\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\cos(x)$.

4.3. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(x) + \cos(x)\right)$.

