Epreuve de Mathématiques 1 PSI

Exercice 1

1) Soit f une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. f admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Soit $G\ :\ a \mapsto \int_a^{a+T} f(t)\ dt = F(a+T) - F(a)$.

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel a, $G'(a) = F'(a+T) - F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$. Donc, la fonction G est constante sur $\mathbb{R}$ puis, pour tout réel a,

$$\int_a^{a+T} f(t)\ dt = G(a) = G(0) = \int_0^T f(t)\ dt.$$

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Pour tout réel t, $f(t+T) = f(t)$. En dérivant, on obtient pour tout réel t, $f'(t+T) = f'(t)$. Ceci montre que la fonction f' est T-périodique.

La réciproque est fausse. Soit $f\ :\ t \mapsto t+1$. Sa dérivée est $f'\ :\ t \mapsto 1$. La fonction f' est 1-périodique mais f n'est pas périodique.

3) Soit $f \in \mathscr{E}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $U(f)(x) = F(x) - F(x-1)$. F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis, pour tout réel x, $(U(f))'(x) = f(x) - f(x-1)$.

4) Soit $f \in \mathscr{E}$. $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier $U(f) \in \mathscr{E}$. Donc, U est une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.

Soient $(f, g) \in \mathscr{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout réel x,

$$U(\lambda f + \mu g)(x) = \int_{x-1}^{x} (\lambda f(t) + \mu g(t))\ dt = \lambda \int_{x-1}^{x} f(t)\ dt + \mu \int_{x-1}^{x} g(t)\ dt = (\lambda U(f) + \mu U(g))(x)$$

et donc $U(\lambda f + \mu g) = \lambda U(f) + \mu U(g)$. Finalement, $U \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$.

5)

5.1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = X^k$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned} U(P_k)(x) &= \int_{x-1}^{x} t^k\ dt = \frac{1}{k+1}\left(x^{k+1} - (x-1)^{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\left(x^{k+1} - \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^{k+1-i}x^i\right) \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}(-1)^{k-i}x^i. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $U(P_k) \in E_n$. Mais alors,

$$U(E_n) = U(\text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_n)) = \text{Vect}(U(P_0), U(P_1), \dots, U(P_n)) \subset E_n.$$

E_n est stable par U et donc U induit un endomorphisme U_n de E_n.

5.2. D'après la question précédente,

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_n}(U_n) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\binom{2}{0} & +\frac{1}{3}\binom{3}{0} & \cdots & \cdots & \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n+1}{0} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\binom{3}{1} & & & \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\binom{n+1}{1} \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \frac{(-1)^{n-2}}{n+1}\binom{n+1}{2} \\ & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{(-1)^1}{n+1}\binom{n+1}{n-1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3. $\det(U_n) = \det(\text{Mat}_{\mathscr{B}_n}(U_n)) = 1^{n+1} = 1 \neq 0$. Donc, $U_n \in GL(E_n)$.

$\chi_{U_n} = (X-1)^{n+1}$ et donc $\text{Sp}\,(U_n) = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n+1}$. Si U_n est diagonalisable, $\text{Mat}_{\mathscr{B}_n}\,(U_n)$ est semblable à $\text{diag}(1, 1, \ldots, 1) = I_{n+1}$ et donc égale à I_{n+1} ce qui est faux. Donc, U_n n'est pas diagonalisable.

6) Soit $f \in \text{Ker}(U)$. Alors, pour tout réel x, $U(f)(x) = 0$. En particulier, $U(f)(1) = 0$ ce qui fournit $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
D'autre part, en dérivant l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $U(f)(x+1) = 0$, on obtient pour tout réel x, $f(x+1) - f(x) = 0$. Donc, f est 1-périodique.

7) Réciproquement, soit $f \in \mathscr{E}$, 1-périodique et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. D'après la question 1, pour tout réel x,

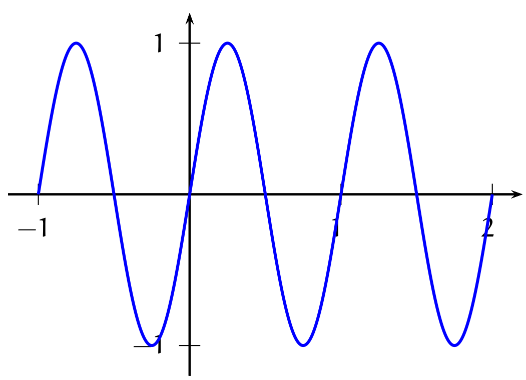
$$U(f)(x) = \int_{x-1}^{(x-1)+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = 0,$$

et donc $f \in \text{Ker}(U)$. Ainsi, $\text{Ker}(U) = \left\{f \in \mathscr{E}/\ f \text{ périodique de période } 1 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$.

8) La fonction $f\ :\ x \mapsto \sin(2\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$\int_{x-1}^{x} \sin(2\pi t)\,dt = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right]_{x-1}^{x} = \frac{1}{2\pi}(\cos(2\pi x - 2\pi) - \cos(2\pi x)) = 0.$$

Donc, $f \in \text{Ker}(U)$. Voici le graphe de f sur $[-1, 2]$:



9) D'après la question 3, pour tout $f \in \mathscr{E}$, la fonction $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. La fonction $h\ :\ x \mapsto |x|$ est un élément de $\mathscr{E}$ qui n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc, h est un élément de $\mathscr{E}$ qui n'admet pas d'antécédent par U. U n'est pas surjectif.

10)

10.1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_a(x) = \int_{x-1}^{x} e^{at}\,dt = \frac{1}{a}\left(e^{ax} - e^{a(x-1)}\right) = \frac{1 - e^{-a}}{a}e^{ax} = \frac{1 - e^{-a}}{a}f_a(x).$$

Donc, $U\,(f_a) = F_a = \dfrac{1 - e^{-a}}{a}f_a$.

10.2. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g'(x) = \frac{e^x \times x - (e^x - 1) \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}.$$

Sur $\mathbb{R}^*$, le signe de g' est le signe de la fonction $k\ :\ x \mapsto xe^x - e^x + 1$. k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $k'(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x$. Donc, la fonction k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction k admet un minimum global strict en 0 égal à $k(0) = 0$. Donc, la fonction k est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Il en est de même de la fonction g' et finalement, la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

10.3. La fonction g est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0[$. La fonction g réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)\right[=]0, 1[$. De même, la fonction g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.
Finalement, puisque $]0, 1[\cap]1, +\infty[= \varnothing$, g réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Soit alors $\lambda \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\lambda = g(-a) = \frac{e^{-a}-1}{-a} = \frac{1-e^{-a}}{a}.$$

D'après la question précédente, f_a est un élément de $\mathscr{E}\setminus\{0\}$ tel que $U(f_a) = \frac{1-e^{-a}}{a}f_a = \lambda f_a$. Donc, λ est valeur propre de U.

D'autre part, soit $f : x \mapsto 1$. f est un élément non nul de $\mathscr{E}$ vérifiant $U(f) = f$ d'après la question 5. Donc, 1 est également valeur propre de U.

Finalement, tout réel strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme U.

Exercice 2

1) On sait que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

On a $X_2(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Inversement, soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X_1(\omega) = 2k$. Alors $X_2(\omega) = k$ et donc $k \in X_2(\Omega)$. Puisque $0 \in X_2(\Omega)$, on a donc $\mathbb{N} \subset X_2(\Omega)$ et finalement $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$. Ensuite,

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = 2k+1) = e^{-\lambda}\left(1 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = e^{-\lambda}\left(1 + \mathrm{sh}(\lambda)\right).$$

Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}^*$, puisque l'application $n \mapsto 2n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $2\mathbb{N}$,

$$P(X_2 = k) = P(X_1 = 2k) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda}.$$

2)

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda)}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

1) On note d'abord que $0 \in H$ et donc, puisque $T \notin H$, $T \neq 0$. Ensuite, puisque $T \notin H$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda T \in H \Leftrightarrow \lambda = 0$ et donc $\mathrm{Vect}(T) \cap H = 0$.
D'autre part, $\dim(H) + \dim(\mathrm{vect}(T)) = (n^2-1) + 1 = n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) < +\infty$. Ceci montre que $E_n = H \oplus \mathrm{Vect}(T)$.

2) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $i = j$, $E_{i,j}^2 = E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ puis par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_{i,i}^k = E_{i,i} \neq 0$.
Si $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0$ et donc $E_{i,j}$ est nilpotente d'indice 2.

En résumé, les éléments de la base canonique de E_n qui sont des matrices nilpotentes sont les $E_{i,j}$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$.

3) Soit N une matrice nilpotente. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de N puis X un vecteur propre associé. On a $0 = N^kX = \lambda^kX$ puis $\lambda^k = 0$ car $X \neq 0$ et finalement $\lambda = 0$. Ainsi, une valeur propre de N est nécessairement nulle.
Réciproquement, supposons que 0 ne soit pas valeur propre de N. Alors, N est inversible puis N^k est inversible en tant que produit de matrices inversibles. Mais ceci est absurde car $N^k = 0$. Donc, 0 est valeur propre de N.

En résumé, la famille des valeurs propres de N est $\mathrm{Sp}(N) = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n})$.

4) $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On effectue sur $\det(U)$ la transformation $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant. On obtient $\det(U) = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne. On effectue ensuite les transformations : $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j - C_1$ ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant. On obtient

$$\det(U) = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \dots & \times & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0.$$

Donc, U est une matrice inversible.

5)

5.1. Si $N \in H$, $A = N$ et $\alpha = 0$ conviennent. Dorénavant, on suppose que $N \notin H$. La matrice $T = I_n$ est inversible et donc n'est pas dans H par hypothèse. D'après la question 1, $E_n = H \oplus \text{Vect}(I_n)$. En particulier, il existe un couple $(A, \alpha) \in H \times \mathbb{R}$ et un seul tel que $N = A + \alpha I_n$.

5.2. A est dans H et donc A n'est pas inversible par hypothèse. Par suite, 0 est valeur propre de A. On sait alors que $0 + \alpha = \alpha$ est valeur propre de $A + \alpha I_n = N$. D'après la question 3, on a nécessairement $\alpha = 0$ et donc $N = A \in H$.

6) Ainsi, H doit contenir toutes les matrices nilpotentes. En particulier, H doit contenir toutes les matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$. Puisque H est un sous-espace vectoriel de E, H doit encore contenir la matrice U qui est inversible. Ceci contredit l'hypothèse faite sur H. Cette hypothèse était absurde et donc H contient une matrice inversible.

7) $\dim(E_2) = 2^2 = 4$. Un hyperplan de E_2 est un sous-espace vectoriel de E_2 de dimension 3.
L'espace des matrices triangulaires supérieures, à savoir $\mathscr{T}_{2,s}(\mathbb{R}) = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est de dimension 3. Il est connu que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Donc, $\mathscr{T}_{2,s}(\mathbb{R})$ est un hyperplan de E_2 stable pour le produit matriciel.

8)

8.1. Soit $(M, N) \in E_n^2$. Puisque $I_n \notin H$, d'après la question 1, il existe $(A, B) \in H^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = A + \alpha I_n$ et $N = B + \beta I_n$. On a $p(M) = \alpha I_n$ et $p(N) = \beta I_n$ puis $p(M)p(N) = \alpha\beta I_n$.

D'autre part, $MN = AB + \alpha B + \beta A + \alpha\beta I_n$. La matrice $AB + \alpha B + \beta A$ est dans H car H est un sous-espace vectoriel de E_n, stable pour le produit matriciel. Donc, $p(MN) = \alpha\beta I_n = p(M)p(N)$.

8.2. Soit $M \in E_n$ telle que $M^2 \in H$. Posons $p(M) = \alpha I_n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente et puisque $M^2 \in H$,

$$0 = p\left(M^2\right) = (p(M))^2 = \alpha^2 I_n.$$

On en déduit que $\alpha = 0$ puis que $p(M) = 0$ et finalement que $M \in H$.

8.3. Si $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0$ est dans H car H est un sous-espace vectoriel de E_n. D'après la question précédente, $E_{i,j} \in H$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque $n \geqslant 2$, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$. Mais alors, $E_{i,i} = E_{i,j} \times E_{j,i} \in H$ car H est stable pour le produit matriciel.

Finalement, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $E_{i,j} \in H$.

8.4. On en déduit que $\text{Vect}(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \subset H$ et donc $H = E_n$. Ceci est absurde et donc $I_n \in H$.

9)

9.1. Puisque $\dim(H) = \dim(E_n) - 1$, on a $\dim\left(H^\perp\right) = 1$ et donc $H^\perp = \text{Vect}(A)$.

Soit $B \in H$. Vérifions que $AB^T \in H^\perp = \text{Vect}(A)$.

Soit $C \in H$. Puisque H est stable pour le produit matriciel, $CB \in H$ puis

$$\left(AB^T | C\right) = \text{Tr}\left(BA^T C\right) = \text{Tr}\left(A^T CB\right) = (A|CB) = 0.$$

Donc, $AB^T \in H^\perp = \text{Vect}(A)$. Par suite, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $AB^T = \alpha A$. En transposant, on obtient $BA^T = \alpha A^T$ et donc BA^T est colinéaire à A^T.

9.2. Si A^T est inversible, après simplification par A^T, pour tout $B \in H$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $B = \alpha I_n$. Donc, $H \subset \text{Vect}(I_n)$ puis $\dim(H) \leqslant 1$. Ceci est absurde car $\dim(H) = n^2 - 1 \geqslant 3$. Donc, A^T n'est pas inversible.

9.3. Soit $B \in H$. D'après la question 9.1, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $BA^T = \alpha A^T$. Mais alors, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $BA^TX = \alpha A^TX = A^T(\alpha X) \in \text{Im}\left(A^T\right) = W$. Donc, W est stable par B.

W est un sous-espace de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par tous les éléments de H.

9.4. Soit $\psi_P : \begin{array}{ccc} E_n & \to & E_n \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$. Pour $M \in E_n$, $\varphi_P(\psi_P(M)) = P^{-1}\left(PMP^{-1}\right)P = M$ et $\psi_P(\varphi_P(M)) = P\left(P^{-1}MP\right)P^{-1} = M$. Donc $\varphi_P \circ \psi_P = \psi_P \circ \varphi_P = \text{Id}_{E_n}$. On sait alors que φ_P est bijective (et que $(\varphi_P)^{-1} = \psi_P$).

D'autre part, pour $(M, N) \in E_n^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_P(\lambda M + \mu N) = P^{-1}(\lambda M + \mu N)P = \lambda P^{-1}MP + \mu P^{-1}NP = \lambda\varphi_P(M) + \mu\varphi_P(N).$$

Donc, $\varphi \in \mathscr{L}(E_n)$ et finalement, $\varphi_P \in GL(E_n)$.

9.5. Par suite, $\dim(H) = \dim(\varphi_P(H))$. Puisque $\text{Im}\left(A^T\right)$ est stable par tous les éléments B de H et que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\text{Im}\left(A^T\right)$, les éléments de $\varphi_P(H)$ sont de la forme $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0_{n-p,p} & C_3 \end{pmatrix}$ où $0_{p,n-p}$ est la matrice nulle de format $(n-p, p)$.

L'ensemble des matrice de cette forme est un sous-espace de E_n de dimension $n^2 - (n-p)p$ et donc

$$\dim(H) = \dim(\varphi_P(H)) \leqslant n^2 - (n-p)p.$$

10) Puisque A^T n'est pas inversible et n'est pas nul, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Maintenant, la fonction $x \mapsto x(n-x)$ est croissante sur $\left[0, \dfrac{n}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{n}{2}, n\right]$. Donc, $p(n-p) \geqslant \text{Min}\{1 \times (n-1), (n-1) \times 1\} = n-1$ puis $\dim(H) \leqslant n^2 - (n-1) = \left(n^2 - 1\right) - (n-2) < n^2 - 1$ car $n \geqslant 3$. Ceci est impossible et donc H n'est pas stable pour le produit matriciel.

Exercice 4

1) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive puisque $u_0 = a > 0$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel ℓ supérieur ou égal à u_0 et en particulier $\ell > 0$.
Mais d'autre part, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, par passage à la limite, on obtient $\ell = \ell + \ell^2$ et donc $\ell^2 = 0$ puis $\ell = 0$. Ceci contredit $\ell > 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

En résumé, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et divergente. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2)

2.1. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} v_{n+p+1} - v_{n+p} &= \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln(u_{n+p+1}) - \frac{1}{2^{n+p}}\ln(u_{n+p}) = \frac{1}{2^{n+p+1}}\left(\ln(u_{n+p+1}) - 2\ln(u_{n+p})\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(\frac{u_{n+p+1}}{u_{n+p}^2}\right) = \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(\frac{u_{n+p} + u_{n+p}^2}{u_{n+p}^2}\right) = \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right). \end{aligned}$$

Puisque $u_{n+p} > 0$, on a encore $1 + \dfrac{1}{u_{n+p}} > 1$ puis $v_{n+p+1} - v_{n+p} > 0$. D'autre part, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $n + p \geqslant n$, on a $u_{n+p} \geqslant u_n$ puis $1 + \dfrac{1}{u_{n+p}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{u_n}$ puis $v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.
Ainsi,

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

2.2. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. $v_{n+k+1} - v_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{k}(v_{n+p+1} - v_{n+p})$ (somme télescopique) et donc

$$\begin{aligned}0 < v_{n+k+1} - v_n &\leqslant \left(\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}}\right) \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\\ &\leqslant \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+p+1}}\right) \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\\ &= \frac{1}{2^n} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).\end{aligned}$$

2.3. D'après la question 2.1 appliquée avec $p = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après la question 2.2 appliquée avec $n = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} \leqslant v_0 + \frac{1}{2^0} \ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)$. Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit $L = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

3) Quand k tend vers $+\infty$, n étant fixé, l'encadrement de la question 2.2 fournit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant L - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{t_n}{u_n} = \frac{e^{2^n L}}{e^{2^n v_n}} = e^{2^n(L-v_n)}$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$1 = e^0 \leqslant \frac{t_n}{u_n} = e^{2^n(L-v_n)} \leqslant e^{\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

D'après la question 1, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{u_n} = 1$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n}{u_n} = 1$ et donc que $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

4)

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}s_{n+1} = e^{2^{n+1}L} - u_{n+1} &= \left(e^{2^n L}\right)^2 - \left(u_n + u_n^2\right) = t_n^2 - u_n^2 - u_n = (t_n - u_n)(t_n + u_n) - u_n\\ &= s_n(s_n + 2u_n) - u_n = s_n^2 + 2s_n u_n - u_n.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n^2 + 2s_n u_n - u_n = s_n^2 + (2s_n - 1)u_n$.

4.2. S'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \frac{t_n}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$ puis

$$0 \leqslant \frac{t_n}{u_n} - 1 = \frac{s_n}{u_n} \leqslant \frac{1}{u_n}.$$

Après multiplication des trois membres de cet encadrement par $u_n > 0$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant s_n \leqslant 1.$$

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

4.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant s_{n+1} \leqslant 1$ et $-1 \leqslant s_n^2 \leqslant 1$ puis $-1 \leqslant s_{n+1}^2 - s_n \leqslant 2$. D'après la question 4.1, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (2s_n - 1)u_n \leqslant 2$ puis que

$$-\frac{1}{u_n} \leqslant 2s_n - 1 \leqslant \frac{2}{u_n}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{u_n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes la suite $(2s_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Par suite, $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}$ et finalement,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} t_n - \frac{1}{2} + o(1).$$

