Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

Exercice 1

1. Pour tout réel x, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2.

2.1 Soient $g \in E$ et $\beta \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto g(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_\beta^x g(t)e^{-t}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction G. De plus, pour tout réel x,

$$G'(x) = e^x \int_\beta^x g(t)e^{-t}\,dt + e^x g(x)e^{-x} = G(x) + g(x),$$

et donc pour tout réel x, $G'(x) - G(x) = g(x)$. On a montré que la fonction G est solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$

2.2 $G(\beta) = 0$.

2.3 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^b$ et donc les solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x + G(x)$.

2.4 G est l'unique solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en β.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $\lambda y'' - (1+\lambda)y' = 0$ est $\lambda z^2 - (1+\lambda)z = 0$. Les solutions de cette équation caractéristique sont $z_1 = 0$ et $z_2 = 1 + \dfrac{1}{\lambda}$. On sait alors que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\lambda y'' - (1+\lambda)y' = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto A + Be^{(1+\frac{1}{\lambda})x}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

4. Soit $x \in I_a$. Posons $M = |f_0(x)|$. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_k(x)| \leqslant M\dfrac{|x|^k}{k!}$.

- L'inégalité est claire pour $k = 0$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $|f_k(x)| \leqslant M\dfrac{|x|^k}{k!}$. Alors,

$$|f_{k+1}(x)| = \left|\int_0^x f_k(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^x |f_k(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^x M\frac{|t|^k}{k!}\,dt\right| = \frac{M}{k!}\left|\int_0^x t^k\,dt\right| = \frac{M}{k!}\left|\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| = M\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général $M\dfrac{|x|^n}{n!}$, $n \geqslant 0$, est convergente de somme $Me^{|x|}$ et donc la série de terme général $f_n(x)|$, $n \geqslant 0$, converge ou encore que la série de terme général $f_n(x)$, $n \geqslant 0$, est absolument convergente. En particulier, la série de terme général $f_n(x)$, $n \geqslant 0$, est convergente.
On a montré que pour tout réel x, la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \geqslant 0$, est convergente ou encore la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 0$, converge simplement sur $\mathbb{R}$.

6. f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ et donc f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.D'autre part, la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers F sur $\mathbb{R}$.
Soit alors $a > 0$. Vérifions que la série de fonctions de terme général f'_n, $n \geqslant 1$, converge normalement sur I_a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 4, pour tout $x \in I_a$,

$$|f'_n(x)| = |f_{n-1}(x)| \leqslant M\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant M\frac{a^{n-1}}{(n-1)!},$$

et donc $\sup\{|f'_n(x)|,\ x \in I_a\} \leqslant M\dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}$. La série numérique de terme général $M\dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}$, $n \geqslant 1$, converge et a pour somme Me^a et donc la série de fonctions de terme général f'_n, $n \geqslant 1$, converge normalement sur I_a.

En résumé,
- chaque fonction f_n est de classe C_1, sur $\mathbb{R}$,
- la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers F sur $\mathbb{R}$,
- la série de fonctions de terme général f'_n, $n \geqslant 1$, converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de plus, $F' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = f_0 + F$.

7. Pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(0) = 0$ et donc $F(0) = 0$.

8. D'après les questions 6 et 7, $F' - F = f_0$ et $F(0) = 0$. F est ainsi l'unique solution au problème de Cauchy : $y' - y = f_0$ et $F(0) = 0$.

9. D'après la question 2.4,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^x \int_0^x f_0(t)e^{-t}\,dt.}$$

10. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = x^2$, alors pour tout réel x, $F(x) = e^x \displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t}\,dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, x]$ si $x \geqslant 0$ ou $[x, 0]$ si $x < 0$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$F(x) = e^x \int_0^x t^2 e^{-t}\,dt = e^x \left(\left[t^2(-e^{-t})\right]_0^x + 2\int_0^x te^{-t}\,dt \right) = -x^2 + 2e^x \int_0^x te^{-t}\,dt.$$

Une nouvelle intégration par parties fournit

$$F(x) = -x^2 + 2e^x \left([t(-e^{-t})]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt \right) = -x^2 + 2e^x\left(-xe^{-x} - e^{-x} + 1\right) = -x^2 - 2x - 2 + 2e^x.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2.}$$

11.

11.1 Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $f_n^{(n)} = f_0$. Soient alors $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Laplace,

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{n+1}^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_{n+1}^{(n+1)}(t)\,dt.$$

11.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(0) = 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f_{n+1}^{(k)}(0) = f_{n+1-k}(0) = 0$. La formule précédente s'écrit alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_0(t)\,dt.}$$

11.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f_0(t)\,dt = \int_0^x f_0(t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} \right) dt.$$

11.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On note I le segment $[0, x]$ si $x \geqslant 0$ et $[x, 0]$ si $x < 0$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, posons $g_k(t) = f_0(t)\dfrac{(x-t)^k}{k!}$.

• Chaque fonction g_k est continue sur le segment $[0, x]$.
• La série de fonctions de terme général g_k, $k \geqslant 0$, converge simplement sur I vers la fonction $G : t \mapsto f_0(t)e^{x-t}$.
• Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in I$, $|g_k|(t)| = |f_0(t)|\dfrac{|x-t|^k}{k!} \leqslant M\dfrac{|x|^k}{k!}$. $M\dfrac{|x|^k}{k!}$ est le terme général d'une série numérique convergente (de somme $Me^{|x|}$) et donc la série de fonctions de terme général g_k, $k \geqslant 0$, converge normalement sur I. On en déduit déjà que G est continue sur I.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^x g_k(t)\ dt$, $k \in \mathbb{N}$, converge et a pour somme $\displaystyle\int_0^x G(t)\ dt$. On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x g_k(t)\ dt = \int_0^x G(t)\ dt = \int_0^x f_0(t)e^{x-t}\ dt = e^x \int_0^x f_0(t)e^{-t}\ dt.$$

On retrouve ainsi l'expression de F obtenue à la question 9.

12.

12.1 Soit $f \in E$. La fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^x te^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par suite, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}\ dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue sur $\mathbb{R}$. Mais alors la fonction H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que ψ est bien une application de E dans E.

Soient $(f, g) \in E^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout réel x,

$$\psi(af + bg)(x) = e^x \int_0^x (af(t) + bg(t))e^{-t}\ dt = ae^x \int_0^x f(t)e^{-t}\ dt + be^x \int_0^x g(t)e^{-t}\ dt = (a\psi(f) + b\psi(g))(x),$$

et donc $\psi(af + bg) = a\psi(f) + b\psi(g)$. On a montré que

$$\boxed{\psi \in \mathscr{L}(E).}$$

12.2 Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}
f \in \mathrm{Ker}(\psi) &\Rightarrow \forall x\mathbb{R},\ e^x \int_0^x f(t)e^{-t}\ dt = 0 \Rightarrow \forall x\mathbb{R},\ \int_0^x f(t)e^{-t}\ dt = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)e^{-x} = 0 \text{ (en dérivant les deux membres de l'égalité précédente)} \\
&\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \text{ (car } \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \neq 0) \\
&\Rightarrow f = 0.
\end{aligned}$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$ et donc

$$\boxed{\psi \text{ est injective.}}$$

12.3 La question précédente montre que 0 n'est pas valeur propre de f. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Supposons que λ soit valeur propre de f. Il existe alors $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $\psi(f) = \lambda f$ ou encore $H = \lambda f$. On sait que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - y = f$. Mais alors, $f = \dfrac{1}{\lambda}H$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En dérivant l'égalité $H = \lambda f$, on obtient $H' = \lambda f'$ ou encore $H + f = \lambda f$ d'après la question 2.1 ou encore $\lambda f + f = \lambda f$ ou enfin nécessairement $f = 0$. Mais alors, λ n'est pas valeur propre.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\psi) = \varnothing.}$$

Exercice 2

Question préliminaire : Soient α et β deux réels strictement positifs.

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta \geqslant 1 + \alpha + \beta.$$

1. $\Delta_1 = 1 + u_1 v_1$ puis en développant suivant la première colonne

$$\Delta_2 = 1 \times (1 + u_2 v_2) - u_1(-v_1) = 1 + u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

2. Soit $n \geqslant 3$. En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + v_n \delta_{n-1},$$

où $\delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & u_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & -v_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_{n-2} & 1 & -v_{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 & u_n \end{vmatrix}$. En développant δ_{n-1} suivant sa dernière ligne, on obtient $\delta_{n-1} = u_n \Delta_{n-2}$ et donc $\Delta_n = \Delta_{n-1} + u_n v_n \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}.}$$

3. • $\Delta_1 = 1 + u_1 v_1 > 0$ et $\Delta_2 = 1 + u_1 v_1 + u_2 v_2 > 0$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\Delta_n > 0$ et $\Delta_{n+1} > 0$. Alors $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + a_{n+2} \Delta_n > 0$.

On a montré par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\Delta_n > 0$.

Soit $n \geqslant 3$. $\Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n \Delta_{n-2} > 0$. D'autre part $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2 v_2 > 0$. Donc $\forall n \geqslant 2$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} > 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (\Delta_n)_{n \geqslant 1} \text{ est croissante.}}$$

4. • $\Delta_1 = 1 + a_1 \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{1}$ puis d'après la question préliminaire, $\Delta_2 = 1 + a_1 + a_2 \leqslant (1 + a_1)(1 + a_2) = \displaystyle\prod_{k=1}^{2}(1 + a_k)$.

• Soit $n \geqslant 3$. Supposons que $\Delta_{n-2} \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n-2}(1 + a_k)$ et $\Delta_{n-1} \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 + a_k)$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2} \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n-1}(1 + a_k) + a_n \prod_{k=1}^{n-2}(1 + a_k) = (1 + a_{n-1} + a_n) \prod_{k=1}^{n-2}(1 + a_k) \leqslant (1 + a_{n-1})(1 + a_n) \prod_{k=1}^{n-2}(1 + a_k) = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k).}$$

5.

5.1 Posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 + a_k > 0$ et donc S_n existe et d'autre part, $P_n > 0$. De plus, $P_n = e^{\ln(P_n)} = e^{S_n}$. Par hypothèse la suite (S_n) converge vers S et donc la suite (P_n) converge vers e^S.

5.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P_n > 0$ puis $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + a_{n+1} \geqslant 1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} \geqslant P_n$ et la suite (P_n) est croissante. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \leqslant P$.

D'après la question 4, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \leqslant P_n \leqslant P$ et d'après la question 3, la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. En résumé, la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par P. On en déduit que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

6.

6.1 Puisque la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, pour tout entier naturel non nul n, $\Delta_n \geqslant \Delta_1 = 1 + a_1 \geqslant 1$. On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geqslant 1$.

6.2 Soit $n \geqslant 2$. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} t_k = \sum_{k=2}^{n} (\Delta_k - \Delta_{k-1}) = \Delta_n - \Delta_1$ (somme télescopique). Par hypothèse la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donc la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=2}^{n} t_k\right)_{n\geqslant 2}$ converge ou encore la série de terme général t_n, $n \geqslant 2$, converge.

6.3 Soit $n \geqslant 2$. $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n\Delta_{n-2} \geqslant a_n$. Ainsi, $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant a_n \leqslant t_n$. Puisque la série de terme général t_n, $n \geqslant 2$, converge, il en est de même de la série de terme général a_n, $n \geqslant 1$.

7. On a montré que la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série de terme général $u_n v_n$, $n \geqslant 1$, converge.

Exercice 3

1. Pour tout réel t, posons $M(t) = (x(t), y(t)) = (3 - 2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$.

• Pour tout réel t, $M(t + 2\pi) = M(t)$. On obtient donc la courbe complète quand t décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$ par exemple.
• Pour tout réel $t \in [-\pi, \pi]$, on a $-t \in [-\pi, \pi]$ puis $M(-t) = (3 - 2\cos(t) - \cos(2t), -2\sin(t) + \sin(2t)) = (x(t), -y(t)) = s_{(Ox)}(M(t))$. Donc, on étudie et on construit la courbe quand t décrit $[0, \pi]$, on obtient la courbe $\mathscr{D}_1$ puis on obtient la courbe complète $\mathscr{D}$ par réflexion d'axe (Ox).

2.

2.1 Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$.

2.2 Soit $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) &= \begin{pmatrix} 2\sin(t) + 2\sin(2t) \\ 2\cos(t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) + 4\sin(t)\cos(t) \\ 2\cos(t) - 2(2\cos^2(t) - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(t)(1 + 2\cos(t)) \\ -4\cos^2(t) + 2\cos(t) + 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\sin(t)(1 + 2\cos(t)) \\ -2(2\cos(t) + 1)(\cos(t) - 1) \end{pmatrix} = (2\cos(t) + 1)\begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2(1 - \cos(t)) \end{pmatrix} \\
&= (2\cos(t) + 1)\begin{pmatrix} 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos(t) + 1)\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ est unitaire est en particulier non nul. Donc

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos(t) + 1) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

La courbe $\mathscr{D}_1$ admet deux points singuliers : les points $M(0)$ et $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

3. Soit $t \in [0, \pi]$. $x(t) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(t) + \cos(2t) = 3 \Leftrightarrow \cos(t) = \cos(2t) = 1$ (car $2\cos(t) + \cos(2t) \leqslant 2 + 1 = 3$ avec égalité si et seulement si $\cos(t) = \cos(2t) = 1$) et donc $x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Soit $t \in]0, \pi]$.

$$\begin{aligned}
\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} &= \frac{2\sin(t) - \sin(2t)}{3 - 2\cos(t) - \cos(2t)} \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{2\left(t - \frac{t^3}{6}\right) - \left(2t - \frac{4t^3}{3}\right) + o(t^3)}{3 - 2\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) - (1 - 2t^2) + o(t^2)} = \frac{t^3 + o(t^3)}{3t^2 + o(t^2)} = \frac{t}{3} + o(t).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}=0$ et donc que la courbe $\mathscr{D}_1$ admet en $M(0)=(0,0)$ l'axe (Ox) pour tangente.

De plus, pour $t\in[0,\pi]$, $y(t)=2\sin(t)(1-\cos(t))\geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $t\in\{0,\pi\}$. Donc $\mathscr{D}_1$ est strictement au-dessus de (Ox) sur $]0,\pi[$ et $\mathscr{D}_1\cap(Ox)=\{M(0),M(\pi)\}=\{(0,0),(4,0)\}$.

4. $I=M\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Posons $h=t-\dfrac{2\pi}{3}$ ou encore $t=\dfrac{2\pi}{3}+h$.

$$\begin{aligned}
x(t)&=3-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+h\right)-\cos\left(2\left(\frac{2\pi}{3}+h\right)\right)=3+\cos(h)+\sqrt{3}\sin(h)+\frac{1}{2}\cos(2h)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2h)\\
&\underset{h\to 0}{=}3+1+\frac{1}{2}+\sqrt{3}h\,(1-1)+h^2\left(-\frac{1}{2}-1\right)+o(h^2)=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}h^2+o(h^2),
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
y(t)&=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+h\right)-\sin\left(2\left(\frac{2\pi}{3}+h\right)\right)=-\sin(h)+\sqrt{3}\cos(h)+\frac{1}{2}\sin(2h)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2h)\\
&\underset{h\to 0}{=}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+h\,(-1+1)+\sqrt{3}h^2\left(-\frac{1}{2}-1\right)+o(h^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}h+o(h^2).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{t(t)-y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}{x(t)-x\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}\underset{h\to 0}{=}\frac{-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}h+o(h^2)}{-\dfrac{3}{2}h^2+o(h^2)}\underset{h\to 0}{=}\sqrt{3}+o(1).$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{D}_1$ admet en I une tangente de coefficient directeur $\sqrt{3}$ ou encore une tangente dirigée par $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.

Une équation de $\mathcal{T}$ est donc $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\left(x-\dfrac{9}{2}\right)$ ou encore $y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$.

5.

5.1 $\sqrt{3}x_\Omega-3\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\dfrac{9}{2}-3\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=y_\Omega$ et donc $\Omega\in\mathcal{T}$.

5.2 Une équation cartésienne de $\mathscr{C}_1$ est $(x-3)^2+y^2=9$. Soit $t\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
M(t)\in\mathscr{C}_1&\Leftrightarrow(2\cos(t)+\cos(2t))^2+(2\sin(t)-\sin(2t))^2=9\Leftrightarrow 4+1+4(\cos(t)\cos(2t)-\sin(t)\sin(2t))=9\\
&\Leftrightarrow\cos(t+2t)=1\Leftrightarrow\cos(3t)=1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ 3t=2k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ t=\frac{2k\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{D}\cap\mathscr{C}_1=\left\{M(0),M\left(\dfrac{2\pi}{3}\right),M\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right\}=\left\{(0,0),\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right),\left(\dfrac{9}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

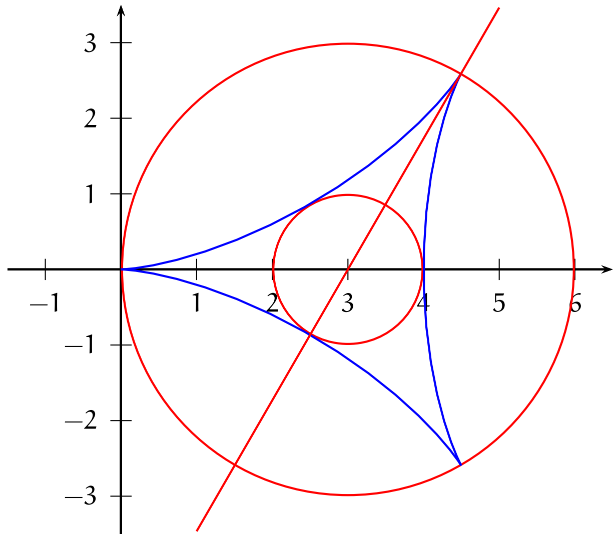
5.3 $J=M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. D'après la question 2.2, un vecteur directeur de la tangente en J est $\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ ou aussi le vecteur $\overrightarrow{v_0}=(\sqrt{3},1)$.

$\Omega J=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}-3\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ et donc $J\in\mathscr{C}_2$. De plus,

$$\overrightarrow{\Omega J}.\overrightarrow{v_0}=\left(\frac{5}{2}-3\right)\times\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 1=0,$$

et donc la tangente à $\mathscr{D}$ en J est aussi tangente à $\mathscr{C}_2$ en J ou encore $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}_2$ en J.

6. Figure.



7. Notons r, la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.
L'affixe du point $M(t)$ est $z(t) = 3 - 2(\cos(t) - i\sin(t)) - (\cos(2t) + i\sin(2t)) = 3 - 2e^{-it} - e^{2it}$ et donc

$$\begin{aligned} z_{r(M(t))} &= 3 + e^{2i\pi/3}(z(t) - 3) = 3 + e^{2i\pi/3}(-2e^{-it} - e^{2it}) = 3 - 2e^{-i(t-\frac{2\pi}{3})} - e^{2i(t+\frac{\pi}{3})} = 3 - 2e^{-i(t-\frac{2\pi}{3})} - e^{2i(t-\frac{2\pi}{3})} \\ &= z_{M(t-\frac{2\pi}{3})}, \end{aligned}$$

et donc, pour tout réel t, $r(M(t)) = M\left(t - \dfrac{2\pi}{3}\right)$. Ceci montre que la courbe $\mathscr{D}$ est invariante par r.

8. Puisque qu'une rotation est une isométrie, la longueur ℓ de $\mathscr{D}$ est le triple de la longueur de la branche de $\mathscr{D}$ obtenue quand t décrit $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

On rappelle que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) = 4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)(2\cos(t) + 1)\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$. Pour $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, on a $4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)(2\cos(t)+1) \geqslant 0$ et d'autre part, le vecteur $\overrightarrow{\tau} = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ est unitaire. On en déduit que pour $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\| = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)(2\cos(t) + 1) = 4\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 4\left(\sin\left(\frac{3t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\ell = 3\int_0^{2\pi/3} 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\,dt = 12\left[-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]_0^{2\pi/3} = 8(-\cos(\pi) + \cos(0)) = 16.$$

$\boxed{\text{La longueur de } \mathscr{D} \text{ est 16 unités de longueur.}}$

