Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

Première partie

1. Soit $M = (x, y, z)$ un point de $\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
{}^tX_M A X_M &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x-2y-z \\ 4x-4y-2z \\ -4x+4y+2z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}(x(2x-2y-z)+2y(2x-2y-z)-2z(2x-2y-z)) \\
&= \frac{1}{9}(2x-2y-z)(x+2y-2z).
\end{aligned}
$$

Par suite, $M \in S \Leftrightarrow (2x-2y-z)(x+2y-2z) = 0 \Leftrightarrow 2x-2y-z = 0$ ou $x+2y-2z = 0$.

Soit $\mathscr{P}_1$ (resp. $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $2x-2y-z = 0$ (resp. $x+2y-2z = 0$). Puisque le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé, un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{n}_1 = (2, -2, -1)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{n}_2 = (1, 2, -2)$. $\overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_2 = 2\times 1 - 2\times 2 + (-1)\times(-2) = 0$ et donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

$$\boxed{\text{S est la réunion des deux plans d'équations respectives } 2x-2y-z=0 \text{ et } x+2y-2z=0.}$$

2. (a) $\|\overrightarrow{e_1}\| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2+2^2+2^2} = 1 = \|\overrightarrow{e_2}\|$ puis $\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{9}(2+2-4) = 0$.

Enfin, $\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_3}$. Donc $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ est une base orthonormée (directe) de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique).

- $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{0}$.
- $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $f\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{0}$.
- $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ -18 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et donc $f\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \overrightarrow{e_1}$.

(b) D'après la question précédente, la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est la matrice U. D'autre part, la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A. On en déduit que les matrices A et U sont semblables.

Plus précisément, si on note P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$,

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale car matrice de passage d'une base orthonormée à une autre. Les formules de changement de bases fournissent alors $U = P^{-1}AP$.

(c) On a $U^2 = E_{1,3}^2 = 0$ et $U \neq 0$ puis $A^2 = PU^2P^{-1} = 0$ et $A \neq 0$.
Si A est diagonalisable, il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(a, b, c)$ et une matrice inversible Q telles que $A = QDQ^{-1}$. Mais alors

$$\text{diag}(a^2, b^2, c^2) = D^2 = Q^{-1}A^2Q = 0,$$

puis $D = 0$ puis $A = 0$ ce qui n'est pas. Donc A n'est pas diagonalisable.

(d) i) Les formules de changement de bases fournissent

$$X_M = PX'_M.$$

(ii) Cette dernière égalité s'écrit plus explicitement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+2y+2z \\ 2x+y-2z \\ -2x+2y-z \end{pmatrix}$$

Par suite, d'après la question 1),

$$M \in S \Leftrightarrow (2x-2y-z)(x+2y-2z) = 0 \Leftrightarrow 9(-z')x' = 0 \Leftrightarrow x'z' = 0.$$

S est donc la réunion des plans d'équations respectives $x' = 0$ et $z' = 0$ dans $\mathcal{R}'$. Ces deux plans sont perpendiculaires car ce sont deux plans de coordonnées d'un repère orthonormé.

3. **(a)** Le rang de f est aussi le rang de sa matrice dans la base $\mathcal{C}$ c'est-à-dire la matrice U. Immédiatement

$$\boxed{\text{rg}(f) = 1.}$$

Ensuite, $U^2 = 0$ et donc

$$\boxed{f \circ f = 0.}$$

(b) Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AV = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2x-2y-z \\ 4x-4y-2z \\ -4x+4y+2z \end{pmatrix} = \frac{2x-2y+z}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout vecteur $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$, $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \phi\left(\overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{c}$ où $\phi\left(\overrightarrow{v}\right) = \dfrac{2x-2y+z}{9}$ et $\overrightarrow{c} = (1, 2, -2)$. De plus, ϕ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Deuxième partie

1. **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} + 2w_{n+1} = \frac{1}{2}(-u_n - w_n + u_n - v_n - w_n) = -\frac{1}{2}(v_n + 2w_n).$$

La suite $(v_n + 2w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$. On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n + 2w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 + 2w_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2-2) = 0.$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -2w_n.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} + 3w_{n+1} = \frac{1}{4}(-3u_n + v_n - w_n + 3u_n - 3v_n - 3w_n) = -\frac{1}{2}(v_n + 2w_n) = 0.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + 3w_{n+1} = 0$ ou encore

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -3w_n.}$$

(c) $w_1 = \dfrac{1}{4}(-1-2+1) = -\dfrac{1}{2}$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n) = \frac{1}{4}(-3w_n + 2w_n - w_n) = -\frac{1}{2}w_n.$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = w_1\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ puis $u_n = -3w_n = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = -2w_n = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ v_n = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$$

Puisque $\left|-\dfrac{1}{2}\right| < 1$, les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) convergent vers 0.

2. **(a)** La matrice $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

(b)

$$\chi_M = \det(M - XI) = \frac{1}{4^3}\begin{vmatrix} -3-4X & 1 & -1 \\ -2 & -4X & -2 \\ 1 & -1 & -1-4X \end{vmatrix} = \frac{1}{64}[(-3-4X)(16X^2+4X-2) + 2(-4X-2) + (-4X-2)]$$
$$= \frac{1}{64}(-64X^3 - 64X^2 - 16X) = -X\left(X^2 + X + \frac{1}{4}\right) = -X\left(X + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Donc M admet 0 pour valeur propre simple et $-\dfrac{1}{2}$ pour valeur propre double.

• Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y - z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x$ et $z = -x$. Donc $\operatorname{Ker}(M) = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1})$ où $\overrightarrow{e_1} = (1, 2, -1)$.

• Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $(x, y, z) \in \operatorname{Ker}\left(M + \dfrac{1}{2}I\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y + z = 0$. Donc $\operatorname{Ker}\left(M + \dfrac{1}{2}I\right) = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ où $\overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1, 0, -1)$.

On sait alors que $M = PDP^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}\left(0, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = P^{-1}X_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$Y_{n+1} = P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}MX_n = DP^{-1}X_n = DY_n,$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = D^nY_0 = \operatorname{diag}\left(0, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)Y_0.$$

Puisque $\left|-\dfrac{1}{2}\right| < 1$, la suite (Y_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en est de même de la suite $(X_n) = (PY_n)$ et on retrouve le fait que les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) convergent vers 0.

Troisième partie

1. Soient $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f\left(\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y}\right) = u\left(\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y}\right) \overrightarrow{a} = \lambda u\left(\overrightarrow{x}\right) \overrightarrow{a} + \mu u\left(\overrightarrow{y}\right) \overrightarrow{a} = \lambda f\left(\overrightarrow{x}\right) + \mu f\left(\overrightarrow{y}\right).$$

Donc f est un endomorphisme de E.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E, $f\left(\overrightarrow{x}\right) = u\left(\overrightarrow{x}\right) \overrightarrow{a} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$. Donc, $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$ puis $\text{rg}(f) \leqslant\leqslant 1$.
De plus, u n'est pas la forme linéaire nulle. Donc, il existe un vecteur $\overrightarrow{x_0}$ tel que $u\left(\overrightarrow{x_0}\right)$. Mais alors, puisque $u\left(\overrightarrow{a}\right) \neq \overrightarrow{0}$, on a $f\left(\overrightarrow{x_0}\right) \neq \overrightarrow{0}$. Ceci montre que $f \neq 0$ et donc que $\text{rg}(f) \geqslant 1$. Finalement,

$$\boxed{\text{rg}(f) = 1.}$$

2. **(a)** Soit $\overrightarrow{x} \in E$.

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow u\left(\overrightarrow{x}\right) \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0} \text{ (car } \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}\text{)} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{x} \in \text{Ker}(u). \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(u)$. Puisque u est une forme linéaire non nulle sur E, on sait que $\dim\left(\text{Ker}(f)\right) = \dim\left(\text{Ker}(u)\right) = n-1 > 0$ (car $n \geqslant 2$). Ceci montre que 0 est valeur propre de f et que le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0 est l'hyperplan $\text{Ker}(u)$.

(b) $\lambda \overrightarrow{x} = f\left(\overrightarrow{x}\right) = u\left(\overrightarrow{x}\right) \overrightarrow{a}$ et donc, puisque $\lambda \neq 0$,

$$\overrightarrow{x} = \frac{u\left(\overrightarrow{x}\right)}{\lambda} \overrightarrow{a} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right).$$

Un vecteur propre de f associé à λ est donc colinéaire à $\overrightarrow{a}$ puis $\text{Ker}(f - \lambda\text{Id}) \subset \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$. Mais $\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$ est de dimension 1 de même que $\text{Ker}(f - \lambda\text{Id})$ car λ est valeur propre de f par hypothèse. Donc, $\text{Ker}(f - \lambda\text{Id}) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$ puis λ est aussi valeur propre associée au vecteur propre $\overrightarrow{a}$. Comme $f\left(\overrightarrow{a}\right) = u\left(\overrightarrow{a}\right) \overrightarrow{a}$, on en déduit que $\lambda = u\left(\overrightarrow{a}\right)$.

(c) **1er cas.** Si $u\left(\overrightarrow{a}\right) \neq 0$, l'égalité $f\left(\overrightarrow{a}\right) = u\left(\overrightarrow{a}\right) \overrightarrow{a}$ montre que $\overrightarrow{a}$ est vecteur propre associé à la valeur propre non nulle $u\left(\overrightarrow{a}\right)$ puis la question précédente montre que le sous-espace propre associé est $\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$ est de dimension 1. Le nombre $u\left(\overrightarrow{a}\right)$ est donc une valeur propre simple de f.
D'autre part, la question (a) montre 0 est valeur propre de f d'ordre au moins $n-1 = \dim\left(\text{Ker}(u)\right)$ ce qui fournit au moins n valeurs propres de f. On a donc trouvé toutes les valeurs propres de f : 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ exactement et $u\left(\overrightarrow{a}\right)$ est valeur propre simple. De plus, le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\text{Ker}(u)$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre $u\left(\overrightarrow{a}\right)$ est $\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$.

2ème cas. Si $u\left(\overrightarrow{a}\right) = 0$, la question (b) montre que f n'admet pas de valeur propre non nulle et la question (a) montre que 0 est valeur propre de f. De plus, le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\text{Ker}(u)$.

(d) On sait que f est diagonalisable si et seulement si $/chi_f$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

• Si $u\left(\overrightarrow{a}\right) \neq 0$, f admet 0 pour valeur propre d'ordre $n-1$ et $u\left(\overrightarrow{a}\right)$ d'ordre 1. Par suite, le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après la question précédente, les dimensions des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont égales aux ordres de multiplicité correspondant. Dans ce cas, f est diagonalisable.

• Si $u\left(\overrightarrow{a}\right) = 0$, f admet 0 pour valeur propre d'ordre $n-1$ au moins. La dernière valeur propre est $\text{Tr}(f)$ qui est bien un réel et qui n'est pas différent de 0 d'après la question (b). Dans ce cas, f admet 0 pour valeur propre d'ordre n. Comme le sous-espace propre associé est de dimension $n-1 \neq n$, f n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } u\left(\overrightarrow{a}\right) \neq 0.}$$

3. **(a)** Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f^p\left(\overrightarrow{x}\right) = u\left(\overrightarrow{x}\right)\left(u\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^{p-1} \overrightarrow{a}$.
• Le résultat est vrai quand $p = 1$.
• Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $f^p\left(\overrightarrow{x}\right) = u\left(\overrightarrow{x}\right)\left(u\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^{p-1} \overrightarrow{a}$. Alors,

$$f^{p+1}\left(\vec{x}\right) = f\left(u\left(\vec{x}\right)\left(u\left(\vec{a}\right)\right)^{p-1}\vec{a}\right) = u\left(\vec{x}\right)\left(u\left(\vec{a}\right)\right)^{p-1} f\left(\vec{a}\right) = u\left(\vec{x}\right)\left(u\left(\vec{a}\right)\right)^{p-1} u\left(\vec{a}\right)\vec{a}$$
$$= u\left(\vec{x}\right)\left(u\left(\vec{a}\right)\right)^{(p-1)+1}\vec{a}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

(b) Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de f.

(c) D'après la question (a), pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = \left(u\left(\vec{a}\right)\right)^{p-1} f$. Quand $p = 2$, on obtient $f^2 = u\left(\vec{a}\right) f = 0$. Toute valeur propre de f est alors une racine du polynôme X^2 et donc f admet pour unique valeur propre 0. Si f est diagonalisable, il existe une base de E constituée de vecteurs propres, tous associés à la valeur propre 0. f s'annule sur cette base et donc $f = 0$ ce qui n'est pas. Donc f n'est pas diagonalisable.

(d) Supposons $u\left(\vec{a}\right) \neq 0$. Toujours d'après la question (a), $f^2 = u\left(\vec{a}\right) f$ ou encore $f \circ \left(f - u\left(\vec{a}\right)\mathrm{Id}_E\right) = 0$. Le polynôme $X\left(X - u\left(\vec{a}\right)\right)$ est donc un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples (car $u\left(\vec{a}\right) \neq 0$) et annulateur de f. Dans ce cas, f est diagonalisable.

4. g est de rang 1 ou encore $\mathrm{Im}(g)$ est de dimension 1. Soit $\vec{b}$ un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(g)$. Alors, $\left(\vec{b}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$. Par suite, pour chaque $\vec{x}$ de E, il existe un réel $\nu\left(\vec{x}\right)$ unique tel que $f\left(\vec{x}\right) = \nu\left(\vec{x}\right)\vec{b}$.

Montrons que l'application ν ainsi définie est une forme linéaire sur E. Soient $\left(\vec{x}, \vec{y}\right) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nu\left(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\right)\vec{b} = f\left(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\right) = \lambda f\left(\vec{x}\right) + \mu f\left(\vec{y}\right) = \left(\lambda\nu\left(\vec{x}\right) + \mu\nu\left(\vec{y}\right)\right)\vec{b}$$

et donc $\nu\left(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\right) = \lambda\nu\left(\vec{x}\right) + \mu\nu\left(\vec{y}\right)$ car $\vec{b}$ n'est pas nul. Ceci montre que ν est une forme linéaire sur E.

5. Puisque $\vec{b}$ n'est pas nul, le noyau de g est le noyau de la forme linéaire non nulle ν. $\mathrm{Ker}g$ est donc un hyperplan. Soit $\left(\vec{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n-1}}\right)$ une base de $\mathrm{Ker}g$.
Si $\nu\left(\vec{b}\right) = 0$, alors pour tout $\vec{x}$ de E,

$$g^2\left(\vec{x}\right) = g\left(\nu\left(\vec{x}\right)\vec{b}\right) = \nu\left(\vec{x}\right)\nu\left(\vec{b}\right)\vec{b} = \vec{0},$$

et donc $g^2 = 0$ ce qui n'est pas. Par suite, $\nu\left(\vec{b}\right) \neq 0$ ou encore $\vec{b}$ est un vecteur n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\nu$. On sait alors que si on pose $\vec{e_n} = \vec{b}$, la famille $\left(\vec{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n-1}}, \vec{e_n}\right)$ est une base de E. Dans cette base, la matrice de g est $\mathrm{diag}\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \nu\left(\vec{b}\right)\right)$. Ceci montre au passage que g est diagonalisable.

6. **(a) Théorème de la base incomplète.** Soit $\left(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p}\right)$ une famille libre de E. On peut compléter cette famille en $\left(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p}, \ldots, \vec{e_n}\right)$ base de E.

(b) Puisque $\mathrm{rg}(g) = 1$, le théorème du rang permet d'affirmer que $\dim(\mathrm{Ker}g) = n - 1$. Puisque $g^2 = 0$, on a en particulier $g\left(g\left(\vec{e_n}\right)\right) = \vec{0}$. Par suite, $g\left(\vec{e_n}\right)$ est un vecteur non nul du noyau de g ou encore la famille $\left(g\left(\vec{e_n}\right)\right)$ est une famille libre du noyau de g. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $\vec{e_2}$, ..., $\overrightarrow{e_{n-1}}$ tels que $\left(g\left(\vec{e_n}\right), \vec{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_{n-1}}\right)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

(c) Enfin, puisque $g\left(\vec{e_n}\right)$ n'est pas nul, $\vec{e_n}$ n'est pas dans l'hyperplan $\mathrm{Ker}(g)$ et encore une fois $\left(g\left(\vec{e_n}\right), \vec{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_{n-1}}, \vec{e_n}\right)$ est une base de E. Dans cette base, la matrice de g a la forme voulue.

7. On sait que deux matrices semblables ont nécessairement même trace. Soient A et B deux matrices carrées de rang 1 de même trace.

1er cas. Supposons que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$. Alors, ni A, ni B ne sont semblables à une matrice du type $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$, et donc A et B sont du type de la question 6). Mais alors, A et B sont toutes deux semblables à la matrice du 6)c) et donc A et B sont semblables.

2ème cas. Supposons que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = \alpha \neq 0$. Alors, ni A, ni B ne sont semblables à la question 6) et donc A et B sont semblables à la matrice $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha)$ d'après la question 5) (et puisque $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = \alpha$. Mais alors, encore une fois, A et B sont semblables.

On a montré que deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Quatrième partie

1. Soit $\overrightarrow{x}$ un élément de Ker(h). Alors, $u\left(\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{x}-u\left(\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ puis $\overrightarrow{x}=\dfrac{u\left(\overrightarrow{x}\right)}{u\left(\overrightarrow{a}\right)}\overrightarrow{a}\in\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$. Ainsi, tout vecteur de Ker(h) est colinéaire à $\overrightarrow{a}$ ou encore $\text{Ker}(h)\subset\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$.
Réciproquement, $h\left(\overrightarrow{a}\right)=\overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{a}\in\text{Ker}h$ puis $\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)\subset\text{Ker}h$ (car Ker$h$ est un sous-espace vectoriel de E). Finalement,

$$\boxed{\text{Ker}(h)=\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right).}$$

Soit $\overrightarrow{x}$ un élément de Ker(u). Alors $h\left(\overrightarrow{x}\right)=u\left(\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{x}$ puis $\overrightarrow{x}=h\left(\dfrac{1}{u\left(\overrightarrow{a}\right)}\overrightarrow{x}\right)\in\text{Im}h$. Ceci montre que $\text{Ker}(u)\subset\text{Im}(h)$.
Réciproquement, soit $\overrightarrow{x}$ un élément de E. $u\left(h\left(\overrightarrow{x}\right)\right)=u\left(\overrightarrow{a}\right)u\left(\overrightarrow{x}\right)-u\left(\overrightarrow{x}\right)u\left(\overrightarrow{a}\right)=0$ et donc $h\left(\overrightarrow{x}\right)\in\text{Ker}(u)$. Ceci montre que $\text{Im}(h)\subset\text{Ker}(u)$. Finalement,

$$\boxed{\text{Im}(h)=\text{Ker}(u).}$$

2. Puisque $\text{Ker}(h)=\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$, Ker(h) n'est pas nul et donc 0 est valeur propre de h associé à la valeur propre 0.

Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur propre associé à une éventuelle valeur propre λ non nulle. On sait que $\overrightarrow{x}\in\text{Im}(h)$ (car $\overrightarrow{x}=h\left(\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{x}\right)$).
Puisque $\text{Im}(h)=\text{Ker}(u)$, on a $h\left(\overrightarrow{x}\right)=u\left(\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{x}$. Ceci montre que nécessairement $\lambda=u\left(\overrightarrow{a}\right)$ et $\text{Ker}\left(h-\lambda Id\right)\subset\text{Im}(h)$.
Réciproquement, pour tout $\overrightarrow{x}$ de $\text{Im}(h)=\text{Ker}(u)$, on a $h\left(\overrightarrow{x}\right)=u\left(\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{x}$. Puisque Ker(u) n'est pas réduit à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ (car $u\left(\overrightarrow{a}\right)\neq 0$), $\lambda=u\left(\overrightarrow{a}\right)$ est effectivement valeur propre de h et le sous-espace propre associé est $\text{Ker}\left(h-\lambda Id\right)=\text{Im}(h)=\text{Ker}(u)$.

$$\boxed{\text{Sp}(h)=\left\{0,u\left(\overrightarrow{a}\right)\right\}.\ E_0=\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)\text{ et }E_{u\left(\overrightarrow{a}\right)}=\text{Im}(h)=\text{Ker}(u).}$$

Supposons de plus que E soit de de dimension finie $n\geqslant 2$. On sait que la somme $E_0+E_{u\left(\overrightarrow{a}\right)}$ est directe. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim\left(E_0\right)+\dim\left(E_{u\left(\overrightarrow{a}\right)}\right)=\dim\left(\text{Ker}(h)\right)+\dim\left(\text{Im}(h)\right)=n$. On en déduit que $E=E_0\oplus E_{u\left(\overrightarrow{a}\right)}$ et donc que

$$\boxed{h\text{ est diagonalisable.}}$$

3. Soit $\overrightarrow{x}\in E$. La formule est immédiate quand $p=1$.
Montrons par récurrence que $\forall p\geqslant 2$, $h^p\left(\overrightarrow{x}\right)=\left(u\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^{p-1}h\left(\overrightarrow{x}\right)$.

- D'après la question 1), on sait que $h\left(\overrightarrow{x}\right)$ est vecteur propre associé à la valeur propre $u\left(\overrightarrow{a}\right)$. Donc $h^2\left(\overrightarrow{x}\right)=h\left(h\left(\overrightarrow{x}\right)\right)=u\left(\overrightarrow{a}\right)h\left(\overrightarrow{x}\right)$. L'égalité est vraie quand $p=2$.
- Soit $p\geqslant 2$. Supposons que $h^p\left(\overrightarrow{x}\right)=\left(u\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^{p-1}h\left(\overrightarrow{x}\right)$. Alors,

$$h^{p+1}\left(\overrightarrow{x}\right)=h\left(\left(u\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^{p-1}h\left(\overrightarrow{x}\right)\right)=\left(u\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^{p-1}h^2\left(\overrightarrow{x}\right)=\left(u\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^{p}h\left(\overrightarrow{x}\right)$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall\overrightarrow{x}\in E,\ \forall p\in\mathbb{N}^*,\ h^p\left(\overrightarrow{x}\right)=\left(u\left(\overrightarrow{a}\right)\right)^{p-1}h\left(\overrightarrow{x}\right).}$$

4. Soit $\overrightarrow{x}\in E$. Pour tout entier naturel non nul p,

$$\left\|h^p\left(\overrightarrow{x}\right)\right\|=\left|u\left(\overrightarrow{a}\right)\right|^{p-1}\left\|h\left(\overrightarrow{x}\right)\right\|,$$

et donc, puisque $\left|u\left(\overrightarrow{a}\right)\right|<1$, on en déduit que $\lim\limits_{p\to+\infty}\left\|h^p\left(\overrightarrow{x}\right)\right\|=0$.

5. *Applications.*

(a) Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, \pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme infinie $\| \|_\infty$.
Soit u la forme linéaire sur E qui à un élément g de E associe $\displaystyle\int_0^\pi g(s)\ ds$. Soit a l'élément de E qui à un réel t de $[0, \pi]$ associe $\sin(3t)$.
$u(a) = \displaystyle\int_0^\pi (-\sin(3t))\ dt = \left[-\frac{\cos(3t)}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}$. Par suite, si h est l'endomorphisme de E défini au début cette partie,

$$(h(f))(t) = \frac{2}{3}f(t) - \sin(3t)\int_0^\pi f(s)\ ds = f_1(t),$$

et plus généralement, pour tout entier naturel p non nul, $f_{p+1} = h(f_p)$. Par suite, pour tout entier naturel p non nul, $f_p = h^p(f)$.

Puisque $|u(a)| = \dfrac{2}{3} < 1$, la question 4) permet d'affirmer que $\|f_p\|_\infty = \|h^p(f)\|_\infty$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Soit alors $t \in [0, \pi]$. Puisque $|f_p(t)| \leqslant \|f_p\|_\infty$, on a en déduit que $f_p(t)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.
On a montré que pour tout réel t de $[0, \pi]$, $f_p(t)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

(b) Soit $E = \mathbb{R}^3$. On munit E de la norme infinie $\| \|_\infty$.
Soient $\overrightarrow{a} = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ puis u la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \mapsto x - y + z$. On a $u\left(\overrightarrow{a}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}$.
Par suite, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$h((x, y, z)) = -\frac{1}{2}(x, y, z) - (x - y + z)\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(-3x + y - z, -2x - 2z, x - y - z).$$

Si on pose : $\forall p \in \mathbb{N}$, $X_p = (u_p, v_p, w_p)$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_{p+1} = h(X_p)$ puis pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_p = h^p(X_0)$. Puisque $\left|u\left(\overrightarrow{a}\right)\right| = \dfrac{1}{2} < 1$, la question 4) permet d'affirmer que $\|X_p\|_\infty = \|h^p(X_0)\|_\infty$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.
Puisque pour tout entier naturel p, $|u_p| \leqslant \|X_p\|_\infty$, on en déduit que u_p tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. De même, v_p et w_p tendent vers 0 quand p tend vers $+\infty$. On a ainsi retrouvé un résultat obtenu à la partie II.

