Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice I

1) a) Soit $x \in E$. Si $x \in \mathrm{Im}(\pi)$, il existe $y \in E$ tel que $x = \pi(y)$. Mais alors $\pi(x) = \pi^2(y) = \pi(y) = x$. Réciproquement si $\pi(x) = x$ alors $x \in \mathrm{Im}(\pi)$. Donc,

$$\mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \pi).$$

Puisque $\pi^2 = \pi$ le polynôme $-X^2 + X = X(1 - X)$ est annulateur de π. Puisque les polynômes X et $1 - X$ sont premiers entre aux, le théorème de décomposition des noyaux fournit

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \pi) = \mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi).}$$

b) i. Soit $x \in E$. $x - \pi(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(\pi)^\perp$ et donc $\langle \pi(x, x - \pi(x)\rangle = 0$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|\pi(x) + (x - \pi(x))\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2 \geqslant \|\pi(x)\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $\|x - \pi(x)\| = 0$ ou encore $\pi(x) = x$ ou enfin $x \in \mathrm{Im}(\pi)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \|\pi(x)\| \leqslant \|x\| \text{ avec égalité si et seulement sir } x \in \mathrm{Im}(\pi).}$$

ii. Soit $x \in E$.

$$\langle \pi(x), x\rangle = \langle \pi(x), \pi(x)\rangle + \langle \pi(x), x - \pi(x)\rangle = \langle \pi(x), \pi(x)\rangle = \|\pi(x)\|^2 \geqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $\pi(x) = 0$ ou encore $x \in \mathrm{Ker}(\pi)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \langle \pi(x), x\rangle \geqslant 0 \text{ avec égalité si et seulement sir } x \in \mathrm{Ker}(\pi).}$$

c) • Supposons que π est un projecteur orthogonal. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\langle \pi(x), y\rangle = \langle \pi(x), \pi(y)\rangle + \langle \pi(x), y - \pi(y)\rangle = \langle \pi(x), \pi(y)\rangle,$$

car $\pi(x) \in \mathrm{Im}(\pi)$ et $y - \pi(y) \in \mathrm{Ker}(\pi) = (\mathrm{Im}(\pi))^\perp$. En échangeant les rôles de x et y, on a aussi $\langle x, \pi(y)\rangle = \langle \pi(x), \pi(y)\rangle = \langle \pi(x), y\rangle$.

En résumé, $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, \pi(y)\rangle = \langle \pi(x), y\rangle$ ou encore $\pi = \pi^*$.

• Supposons que $\pi = \pi^*$. Soient $x \in \mathrm{Ker}(\pi)$ et $y \in E$.

$$\langle x, \pi(y)\rangle = \langle \pi^*(x), y\rangle = \langle \pi(x), y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0,$$

et donc tout élément de $\mathrm{Ker}(\pi)$ est orthogonal à tout élément de $\mathrm{Im}(\pi)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\pi) \subset (\mathrm{Im}(\pi))^\perp$. D'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\pi)) = \dim\left((\mathrm{Im}(\pi))^\perp\right) < +\infty$ et finalement $\mathrm{Ker}(\pi) = (\mathrm{Im}(\pi))^\perp$. Ceci montre que π est un projecteur orthogonal.

On a montré que

$$\boxed{\text{Pour tout projecteur } \pi,\ \pi \text{ est un projecteur orthogonal si et seulement si } \pi = \pi^*.}$$

2) a) Soit f l'endomorphisme de matrice A dans la base $\mathscr{B}$ considérée. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormale, on sait que $f = f^* \Leftrightarrow M = {}^tM \Leftrightarrow b = c$. Cette condition est dorénavant acquise. f est un projecteur orthogonal si et seulement si $f^2 = f$ puis

$$f^2 = f \Leftrightarrow M^2 = M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = a \\ ab + bd = b \\ b^2 + d^2 = d \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ a^2 = a \\ d^2 = d \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} b \neq 0 \\ d = 1 - a \\ a^2 + b^2 = a \\ b^2 + (1-a)^2 = 1 - a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ a^2 = a \\ d^2 = d \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} b \neq 0 \\ d = 1 - a \\ a(1-a) = b^2 \end{array}\right. .$$

Le premier système admet quatre solutions les matrices 0, I_2, $E_{1,1}$ et $E_{2,2}$. Par suite,

$$f \text{ est un projecteur strict orthogonal} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ a = 1 \\ d = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ a = 0 \\ d = 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} b \neq 0 \\ d = 1 - a \\ a(1-a) = b^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 1 - a \\ a(1-a) = b^2 \end{array}\right. .$$

Finalement

$$\boxed{f \text{ est un projecteur strict orthogonal} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 1 - a \\ b = c \\ a(1-a) = b^2 \end{array}\right. .}$$

b) La dernière égalité impose en particulier $a(1-a) \geqslant 0$ et donc $a \in [0,1]$. De même, $d \in [0,1]$.

c)

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\chi_N = X^2 - aX = X(X - a)$.

• Si $a \in]0,1]$, χ_N est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Donc N est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$). Ses valeurs propres, à savoir 0 et a, sont dans $[0,1]$.
• Si $a = 0$ alors $b^2 = 0$ puis $b = 0$. Mais alors $N = 0$ et en particulier N est diagonalisable à valeurs propres dans $[0,1]$.

d) π_1 est un projecteur strict. En particulier, $\mathrm{Ker}(\pi_1)$ n'est ni $\{0\}$, ni E et donc $\mathrm{Ker}(\pi_1)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$ sont deux droites vectorielles. Soient e_1 un vecteur unitaire de $\mathrm{Im}(\pi_1)$ et e_2 un vecteur unitaire de $\mathrm{Ker}(\pi_1)$. Puisque $\mathrm{Ker}(\pi_1) = (\mathrm{Im}(\pi_1))^\perp$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base orthonormée de E. De plus,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\pi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \exists a \in [0,1]/\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\pi_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}.$$

Mais alors, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\pi_1 \circ \pi_2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\pi_1) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\pi_2) = N$. La question précédente permet alors d'affirmer que $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable à valeurs propres dans $[0,1]$.

3) a) $(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1)^* = \pi_1^* \circ \pi_2^* \circ \pi_1^* = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$. Donc, $f = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E. D'après le théorème spectral, le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$ et il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.

D'après la question 1)b)i., pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\| = \|\pi_1(\pi_2(\pi_1(x)))\| \leqslant \|pi_2(\pi_1(x))\| \leqslant \|\pi_1(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

$$\|x\| \geqslant \|f(x)\| = |\lambda|\|x\|$$

et donc $(1 - |\lambda|)\|x\| \geqslant 0$ puis $1 - |\lambda| \geqslant 0$ car $\|x\| > 0$.

D'autre part, puisque π_1 est symétrique, la question 1)b)ii. fournit,

$$\lambda\|x\|^2 = \langle \lambda x, x \rangle = \langle \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x), x \rangle = \langle \pi_2(\pi_1(x)), \pi_1(x) \rangle \geqslant 0,$$

et donc $\lambda \geqslant 0$ puisque $\|x\|^2 > 0$. En résumé, $|\lambda| \leqslant 1$ et $\lambda \geqslant 0$ et finalement, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

b) Pour tout $x \in E$, $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x) \in \mathrm{Im}(\pi_1)$ et en particulier, $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est stable par $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.

c) De même, pour tout $x \in E$, $\pi_1 \circ \pi_2(x) \in \mathrm{Im}(\pi_1)$ et en particulier, $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est stable par $\pi_1 \circ \pi_2$. Ainsi, $(\pi_1 \circ \pi_2)_{/\mathrm{Im}(\pi_1)}$ « est » un endomorphisme de $\mathrm{Im}(\pi_1)$.

Pour tout $x \in \mathrm{Im}(\pi_1)$, $\pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x)$ et donc $(\pi_1 \circ \pi_2(_{/\mathrm{Im}(\pi_1)} = f_{/\mathrm{Im}(\pi_1)}$.

• Puisque f est diagonalisable, il existe un polynôme P non nul scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples tel que $P(f) = 0$. Mais alors, $P\left((\pi_1 \circ \pi_2)_{/\mathrm{Im}(\pi_1)}\right) = P\left(f_{/\mathrm{Im}(\pi_1)}\right) = 0$. On a fourni un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racine simples, annulateur de $(\pi_1 \circ \pi_2)_{/\mathrm{Im}(\pi_1)}$ et on en déduit que $(\pi_1 \circ \pi_2)_{/\mathrm{Im}(\pi_1)}$ est diagonalisable.

• On sait que le polynôme caractéristique de $f_{/\mathrm{Im}(\pi_1)}$ divise celui de f et donc le polynôme caractéristique de $(\pi_1 \circ \pi_2)_{/\mathrm{Im}(\pi_1)}$ divise celui de f. En particulier, toute valeur propre de $(\pi_1 \circ \pi_2)_{/\mathrm{Im}(\pi_1)}$ est une valeur propre de f et est donc un élément de $[0, 1]$ d'après la question précédente.

d) On sait que

$$G^{\perp} = (\mathrm{Im}(\pi_1) + \mathrm{Ker}(\pi_2))^{\perp} = (\mathrm{Im}(\pi_1))^{\perp} \cap (\mathrm{Ker}(\pi_2))^{\perp} = \mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2).$$

Soit $x \in G^{\perp} = \mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2)$. Alors $\pi_1(x) = 0$ et $\pi_2(x) = x$. Mais alors $\pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(x) = 0$. Donc $(\pi_1 \circ \pi_2)_{/G^{\perp}} = 0$.

e) D'après la question 3)c), la restriction de $\pi_1 \circ \pi_2$ à $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est diagonalisable.
Soit donc $(e'_k)_{1 \leqslant p}$ une base de $\mathrm{Im}(\pi_1)$ constituée de vecteurs propres de $\pi_1 \circ \pi_2$. Soit $(e'_k)_{p+1 \leqslant q}$ une base de $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ (et donc constituée de vecteurs propres de $\pi_1 \circ \pi_2$ associés à la valeur propre 0). La famille $(e'_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\pi_1) + \mathrm{Ker}(\pi_2)$.
On en extrait $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ une base de $\mathrm{Im}(\pi_1) + \mathrm{Ker}(\pi_2)$. Par construction, chaque e_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, est vecteur propre de $\pi_1 \circ \pi_2$ associé à une valeur propre soit nulle, soit dans $[0, 1]$. Soit enfin $(e_k)_{r+1 \leqslant k \leqslant n}$ une base de $\mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2)$. D'après la question 3)d), les e_k, $r + 1 \leqslant k \leqslant n$, sont vecteurs propres de $\pi_1 \circ \pi_2$ associés à la valeur propre 0.

Puisque $\mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2) = (\mathrm{Im}(\pi_1) + \mathrm{Ker}(\pi_2))^{\perp}$, $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E et chacun des e_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, est vecteur propre de $\pi_1 \circ \pi_2$ associé à une valeur propre élément de $[0, 1]$.

Par suite, $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

f) Notons r le rang de $\pi_1 \circ \pi_2$.

$$r = \dim(\pi_1(\pi_2(E))) \leqslant \dim(\pi_2(E)) = r_2 < n.$$

• Si $r = 0$, alors $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$ puis $\mathrm{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = 0 \leqslant r_2$. De plus, il n'y a pas égalité car $\pi_2 \neq 0$ et donc $r_2 \geqslant 1$.

• Supposons $r \in [\![1, n-1]\!]$. Puisque $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable, r est le nombre de valeurs propres non nulles (et donc éléments de $]0, 1]$) de $\pi_1 \circ \pi_2$. Posons $\mathrm{Sp}(\pi_1 \circ \pi_2) = (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ où $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $0 < \lambda_k \leqslant 1$ et $\forall k \in [\![r+1, n]\!]$, $\lambda_k = 0$.

$$\mathrm{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \leqslant \sum_{k=1}^{r} 1 = r \leqslant r_2.$$

Analysons les cas d'égalité. On note tout d'abord que les valeurs propres non nulles de $\pi_1 \circ \pi_2$ sont toutes associées à des vecteurs éléments de $\mathrm{Im}(\pi_1)$. Par suite, $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ est non seulement une famille libre de $\mathrm{Im}(\pi_1)$ mais une base de $\mathrm{Im}(\pi_1)$.

Si on a l'égalité, en particulier, nécessairement $r = r_2$. Or,

$$r = r_2 \Leftrightarrow \dim(\pi_1(\mathrm{Im}(\pi_2))) = \dim(\mathrm{Im}(\pi_2)) \Leftrightarrow \pi_{1/\mathrm{Im}(\pi_2)} \text{ est injective} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\pi_2) \cap \mathrm{Ker}(\pi_1) = \{0\}.$$

D'autre part, on a l'égalité si et seulement si chaque valeur propre λ_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, est égale à 1. Or,

$$\forall k \in [\![1, r]\!],\ \lambda_k = 1 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, r]\!],\ \pi_1(\pi_2(e_k)) = e_k.$$

Ceci impose $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\|e_k\| = \|\pi_1 \circ \pi_2(e_k)\|$. Or d'après la question 1)a)i), $\|\pi_1 \circ \pi_2(e_k)\| \leqslant \|\pi_2(e_k)\| \leqslant \|e_k\|$ et chacune des inégalités écrites est une égalité. Toujours d'après la question 1)b)ii), ceci impose $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $e_k \in \mathrm{Im}(\pi_2)$ puis $\mathrm{Im}(\pi_1) \subset \mathrm{Im}(\pi_2)$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
0 &= \dim(\mathrm{Im}(\pi_2) \cap \mathrm{Ker}(\pi_1)) = \dim(\mathrm{Im}(\pi_2)) + \dim(\mathrm{Ker}(\pi_1)) - \dim(\mathrm{Im}(\pi_2) + \mathrm{Ker}(\pi_1)) \\
&= \dim(\mathrm{Im}(\pi_2)) + \dim(\mathrm{Ker}(\pi_1)) - n \text{ (car } \mathrm{Im}(\pi_1) \subset \mathrm{Im}(\pi_2)) \\
&\geqslant \dim(\mathrm{Im}(\pi_1)) + \dim(\mathrm{Ker}(\pi_1)) - n = 0.
\end{aligned}$$

La seule inégalité écrite doit être une égalité. Par suite, $\dim(\mathrm{Im}(\pi_1)) = \dim(\mathrm{Im}(\pi_2))$ puis $\mathrm{Im}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2)$ et finalement $\pi_1 = \pi_2$.

Réciproquement si $\pi_1 = \pi_2$, la matrice de π_2 dans une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(\pi_2) \oplus \mathrm{Ker}(\pi_2)$ est $D = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r_2}, 0, \dots, 0)$ puis

$$\mathrm{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = \mathrm{Tr}(\pi_2^2) = \mathrm{Tr}(\pi_2) = \mathrm{Tr}(D) = r_2.$$

Finalement

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) \leqslant r_2 \text{ et } \mathrm{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = r_2 \Leftrightarrow \pi_1 = \pi_2.}$$

Exercice II

1) a) Un calcul par blocs fournit

$$M_{A,B,C,D} \times M_{I_n,E,0_n,I_n} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & E \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AE+B \\ C & CE+D \end{pmatrix}$$

b) Puisque la matrice A est inversible, on peut appliquer le résultat précédent à la matrice $E = -A^{-1}B$. On obtient

$$M_{A,B,C,D} \times M_{I_n,E,0_n,I_n} = \begin{pmatrix} A & A(-A^{-1}B)+B \\ C & C(-A^{-1})B+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & -CA^{-1}B+D \end{pmatrix}.$$

Un calcul de déterminant triangulaires par blocs fournit $\det M_{I_n,E,0_n,I_n} = (\det(I_n))^2 = 1$ et donc

$$\det M_{A,B,C,D} = \det \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & -CA^{-1}B+D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

2) a) Puisque $AC = CA$, on a encore $A^{-1}ACA^{-1} = A^{-1}CAA^{-1}$ et donc $CA^{-1} = A^{-1}C$. Mais alors

$$\det M_{A,B,C,D} = \det A \times \det(D - A^{-1}CB) = \det(AD - AA^{-1}CB) = \det(AD - CB).$$

b) i. Pour tout réel λ, $\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & D - \lambda I_n \end{pmatrix} = \det M_{A-\lambda I_n,B,C,D-\lambda I_n}$. Pour $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(D)$, les matrices $A - \lambda I_n$ et $D - \lambda I_n$ et donc, d'après la question précédente, pour $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(D)$,

$$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det\left((A - \lambda I_n)(D - \lambda I_n - CB\right) = \det\left(\lambda^2 I_n + \lambda(-A - D) + AD - BC\right).$$

ii. Puisque $\mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(D)$ est un ensemble fini, les polynômes $\chi_{M_{A,B,C,D}}$ et $\lambda \mapsto \det\left(\lambda^2 I_n + \lambda(-A - D) + AD - BC\right)$ coïncident en une infinité de valeurs de λ. Mais alors ces polynômes sont égaux. En particulier, il prenne la même valeur en 0 ce qui fournit

$$\det(M_{A,B,C,D}) = \chi_{M_{A,B,C,D}}(0) = \det(AD - BC).$$

3) a) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. ${}^t({}^tBB) = {}^tB{}^t({}^tB) = {}^tBB$ et donc ${}^tBB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tX{}^tBBX = {}^t(BX)BX = \|BX\|_2^2 \geqslant 0 \quad (\mathrm{I}).$$

Par suite, ${}^tBB \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Ensuite, puisque ${}^tBB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on sait que le polynôme caractéristique de ${}^tBB$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ${}^tBB$ puis $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. (I) s'écrit

$$\|BX\|_2^2 = {}^tX{}^tBBX = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|_2^2,$$

et donc, puisque $\|X\|_2^2 > 0$, on a $\lambda = \dfrac{\|BX\|_2^2}{\|X\|_2^2} \geqslant 0$. Les valeurs propres de ${}^tBB$ sont donc des réels positifs ou nuls.

b) D'après la question 2)b)i., pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\chi_S(\lambda) &= \det(\lambda^2 I_n - 2\lambda I_n + I_n - B{}^tB) = (-1)^n \det(B{}^tB - (\lambda - 1)^2 I_n) = (-1)^n \chi_{B{}^tB}((\lambda - 1)^2) \\ &= (-1)^n \chi_{{}^tBB}((\lambda - 1)^2).\end{aligned}$$

c) Soit $T \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On sait que les valeurs propres de T sont réelles.

• Supposons que $T \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

$$^t XTX = \lambda tXX = \lambda \|X\|_2^2,$$

et puisque $\|X\|_2^2 > 0$, on a encore $\lambda = \dfrac{^t XTX}{\|X\|_2^2} > 0$. Ainsi, $\text{Sp}(T) \subset]0, +\infty[$.

• Supposons sue $\text{Sp}(T) \subset]0, +\infty[$. T est symétrique réelle et donc T est orthogonalement semblable à une matrice diagonale d'après le théorème spectral. Posons $T = PD^tP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathscr{D}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $X' = {}^tPX = (x_i')_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$$^t XTX = {}^tXPD^tX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = {}^tX'DX' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \geqslant 0.$$

De plus

$$\begin{aligned}
^t XTX = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i x_i'^2 = 0 \text{ (car } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i x_i'^2 \geqslant 0) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i' = 0 \text{ (car } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0) \\
&\Leftrightarrow X' = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ (car } P \in GL_n(\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall T \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ (T \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(T) \subset]0, +\infty[.}$$

d) La matrice S est symétrique réelle.

Si on pose $\text{Sp}({}^tBB) = (\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ où $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_{B^tB}(\lambda) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda)$ puis

$$\chi_S(\lambda) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - (\lambda - 1)^2) = \prod_{k=1}^{n}((\lambda - 1)^2 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - 1 - \sqrt{\lambda_k})(\lambda - 1 + \sqrt{\lambda_k}),$$

et donc

$$\text{Sp}(S) = \left(1 - \sqrt{\lambda_1}, \dots, 1 - \sqrt{\lambda_n}, 1 + \sqrt{\lambda_1}, \dots, 1 + \sqrt{\lambda_n}\right).$$

D'après la question précédente,

$$S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ 1 \pm \sqrt{\lambda_k} > 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \sqrt{\lambda_k} < 1 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k < 1.$$

En résumé,

$$\boxed{S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}({}^tBB) \subset [0, 1[.}$$

4) a) Par récurrence, $\forall n \geqslant 1$, $A_n \in \mathscr{M}_{2^n}(\mathbb{R})$.

Soit $n \geqslant 2$. Puisque les matrices $2A_{n-1}$ et iA_{n-1} commutent, la question 2) permet d'affirmer que

$$\det(A_n) = \det((2A_{n-1})(-2A_{n-1}) - (iA_{n-1})(iA_{n-1})) = \det(-3A_{n-1}^2) = (-3)^{2^{n-1}} (\det A_{n-1})^2 = 3^{2^{n-1}} (\det A_{n-1})^2,$$

(car pour $n \geqslant 2$, 2^{n-1} est pair).

b) Ainsi, $\det(A_1) = -3$ et $\forall n \geqslant 2$, $\det(A_n) = 3^{2^{n-1}} (\det A_{n-1})^2$.

Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \ln(\det(A_n))$. Alors, $u_2 = \ln(3^4) = 4\ln 3$ et pour $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = 2u_n + 2^n \ln 3$ $(\mathscr{R}_n)$.
La récurrence $(\mathscr{R}_n)$ admet une solution particulière de la forme $u_n = an2^n$. Pour une telle suite

$$u_{n+1} - 2u_n = a((n + 1) - n)2^{n+1} = a2^{n+1},$$

et donc la suite $n \mapsto \dfrac{\ln 3}{2} n2^n$ est une solution particulière de $(\mathscr{R}_n)$. La solution générale de $(\mathscr{R}_n)$ est alors $v\ :\ n \mapsto \lambda 2^n + \dfrac{\ln 3}{2} n2^n$. Une telle suite vérifie $v_2 = 4\ln 3$ si et seulement si $4\lambda + 4\ln 3 = 4\ln 3$ ou encore $\lambda = 0$. Finalement

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{\ln 3}{2} n 2^n,$$

puis

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \det(A_n) = 3^{n2^{n-1}}.}$$

c) Soit $n \geqslant 2$. D'après la question 2)b),

$$\begin{aligned}
\chi_{A_n} &= \det M_{2A_{n-1}-XI_n, iA_{n-1}, iA_{n-1}, -2A_{n-1}-XI_n} = \det\left(X^2 I_{2^{n-1}} - 3A_{n-1}^2\right) \\
&= 3^{2^{n-1}} \det\left(\left(\frac{X}{\sqrt{3}}\right)^2 I_{2^{n-1}} - A_{n-1}^2\right) \\
&= 3^{2^{n-1}} \det\left(\left(\frac{X}{\sqrt{3}}\right) I_{2^{n-1}} - A_{n-1}\right) \det\left(\left(\frac{X}{\sqrt{3}}\right) I_{2^{n-1}} + A_{n-1}\right) \\
&= 3^{2^{n-1}} \det\left(A_{n-1} - \left(\frac{X}{\sqrt{3}}\right) I_{2^{n-1}}\right) \det\left(\left(-A_{n-1} - \frac{X}{\sqrt{3}}\right) I_{2^{n-1}}\right) \\
&= 3^{2^{n-1}} \chi_{A_{n-1}}\left(\frac{X}{\sqrt{3}}\right) \chi_{-A_{n-1}}\left(\frac{X}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

d) $\chi_{A_1} = X^2 - 3 = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\chi_{A_{n-1}} = \left(X - \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}\right)^{2^{n-2}} \left(X + \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}\right)^{2^{n-2}}$. Alors

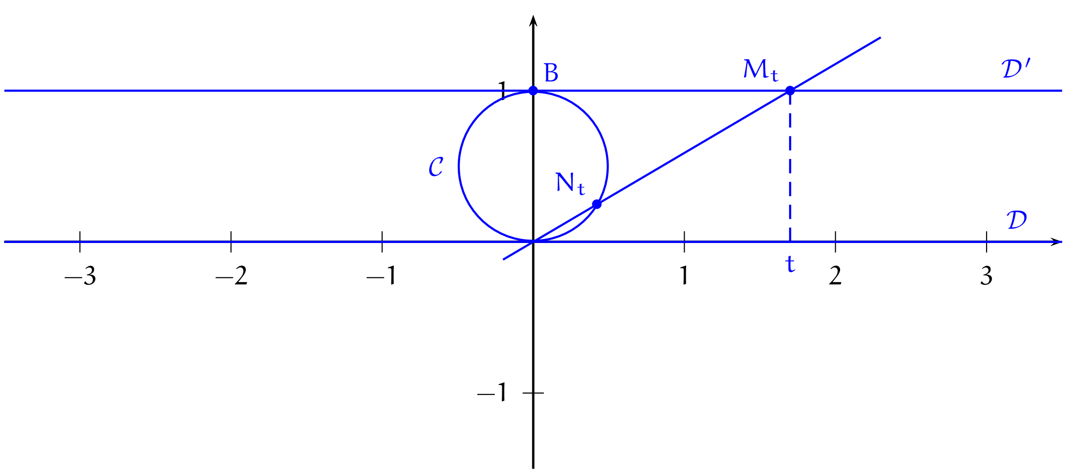
$$\begin{aligned}
\chi_{A_n} &= 3^{2^{n-1}} \left(\frac{X}{\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}\right)^{2^{n-2}} \left(\frac{X}{\sqrt{3}} + \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}\right)^{2^{n-2}} \left(-\frac{X}{\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}\right)^{2^{n-2}} \left(-\frac{X}{\sqrt{3}} + \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}\right)^{2^{n-2}} \\
&= \left(X - \left(\sqrt{3}\right)^n\right)^{2^{n-1}} \left(X + \left(\sqrt{3}\right)^n\right)^{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \chi_{A_n} = \left(X - \left(\sqrt{3}\right)^n\right)^{2^{n-1}} \left(X + \left(\sqrt{3}\right)^n\right)^{2^{n-1}}.}$$

ou encore les valeurs propres de A_n sont $\left(\sqrt{3}\right)^n$ et $-\left(\sqrt{3}\right)^n$, toutes deux d'ordre 2^{n-1}.

Exercice III



1) a) Pour $t \neq 0$, N_t est un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de Oet de B et [OB] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$. Donc le triangle ON_tB est rectangle en N_t. Si $t = 0$, $N_t = B$ et il n'y a rien de plus à dire.

b) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y(y-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0.$$

D'autre part, $\mathcal{D}'$ est la droite d'équation $y = 1$.

c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Les coordonnées de M_t sont $(t, 1)$. Une équation de la droite OM_t est donc $x - ty = 0$. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in \mathcal{C} \cap (OM_t) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 - y = 0 \\ x - ty = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = ty \\ y((1+t^2)y - 1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 0 = x \text{ ou } y = \frac{1}{1+t^2} \text{ et } x = \frac{t}{1+t^2}.$$

Comme $N_t \neq 0$, les coordonnées de N_t sont $\left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)$.

d) Soit $t \in \mathbb{R}$, les coordonnées de $\overrightarrow{N_tM_t}$ sont $\left(t - \frac{t}{1+t^2}, 1 - \frac{1}{1+t^2}\right)$ ou encore $\left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)$.

2) a) et b) Pour $t \in \mathbb{R}$, les coordonnées de P_t sont donc $\left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)$. Etudions l'arc $\gamma \ : \ t \mapsto \left\{\begin{array}{l} x(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array}\right.$.

• Pour tout réel t, $\gamma(-t) = (x(-t), y(-t)) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(\gamma(t))$. On étudie et on construit le support de l'arc γ quand t décrit $[0, +\infty[$ et on obtient le support complet par réflexion d'axe (Oy).

• Pour tout réel t, $x'(t) = \frac{3t^2(1+t^2) - t^3(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$ et $y'(t) = \frac{2t(1+t^2) - t^2(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$.

• **Tableau de variations conjointes de x et y.**

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1
$y'(t)$		$-$	0	$+$	

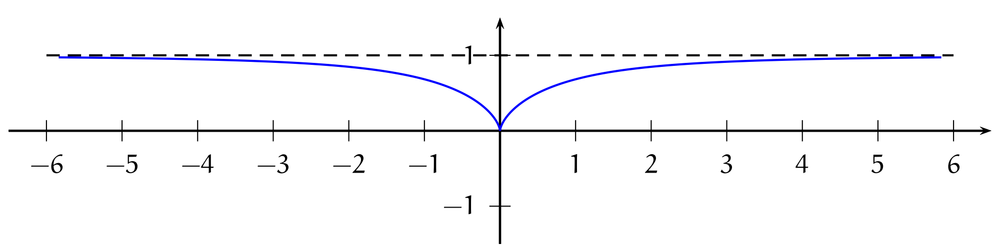
• **Etude au point singulier.** L'étude précédente montre que l'arc γ admet un et un seul point singulier à savoir le point $\gamma(0) = (0, 0)$. Pour $t \neq 0$,

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{t^2}{1+t^2} \times \frac{1+t^2}{t^3} = \frac{1}{t},$$

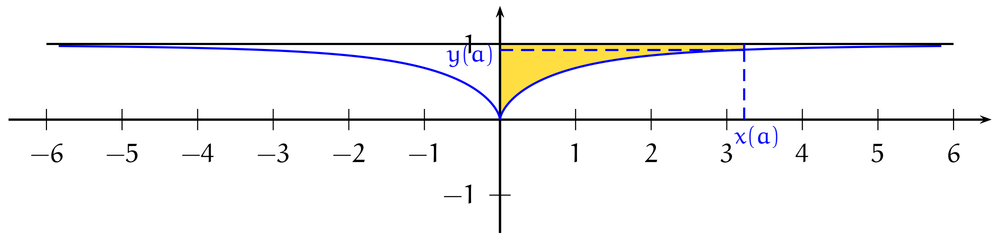
puis $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = -\infty$. Donc Γ admet en $(0, 0)$ une tangente dirigée par $\overrightarrow{j}$. Par symétrie par rapport à (Oy), le point $\gamma(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

• **Branches infinies.** Quand t tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), $x(t)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $y(t)$ tend vers 1. Donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à Γ quand t tend vers $\pm\infty$.

• **Représentation de Γ.**



c) Soit $a > 0$. Déterminons d'abord l'aire du domaine D_a ci-dessous :



On note C le contour de D parcouru une fois dans le sens direct, on sait que l'aire $\mathscr{A}_a$ de D est

$$\mathscr{A}_a = \int_C x\,dy.$$

C se décompose en quatre arcs :

- C_1 est l'arc γ parcouru de $\gamma(0)$ à $\gamma(a)$.
- C_2 est le segment joignant les points $\gamma(a)$ et $(x(a), 1)$. Une paramétrisation de C_2 est $\left\{\begin{array}{l} x = x(a) \\ y = t \end{array}\right.$, $y(a) \leqslant t \leqslant 1$.
- C_3 est le segment joignant les points $(x(a), 1)$ et $(0, 1)$.
- C_4 est le segment joignant les points $(0, 1)$ et $(0, 0)$.

• Sur C_4, $x = 0$ et donc $\displaystyle\int_{C_4} x\,dy = 0$.

• Sur C_3, y est constant et donc $\displaystyle\int_{C_3} x\,dy = 0$.

Il reste $\mathscr{A}_a = \displaystyle\int_{C_1} x\,dy + \int_{C_2} x\,dy$.

$$\int_{C_2} x\,dy = \int_{y(a)}^{1} x(a)\,dt = (1 - y(a))x(a) = \left(1 - \frac{a^2}{a^2+1}\right)\frac{a^3}{a^2+1} = \frac{a^3}{(a^2+1)^2}.$$

puis

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} x\,dy &= \int_0^a \frac{t^3}{t^2+1} \times \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \int_0^a t^3 \times \frac{2t}{(t^2+1)^3}\,dt \\
&= \left[t^3 \times \frac{-1}{2(t^2+1)^2}\right]_0^a + \frac{3}{2}\int_0^a \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = -\frac{a^3}{2(a^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int_0^a t \times \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt \\
&= -\frac{a^3}{2(a^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\left[t \times \frac{-1}{1+t^2}\right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{t^2+1}\,dt\right) = -\frac{a^3}{2(a^2+1)^2} - \frac{3a}{4(a^2+1)} + \frac{3}{4}\operatorname{Arctan} a.
\end{aligned}$$

et donc

$$\mathscr{A}_a = \frac{a^3}{(a^2+1)^2} - \frac{a^3}{2(a^2+1)^2} - \frac{3a}{4(a^2+1)} + \frac{3}{4}\operatorname{Arctan} a = \frac{a^3}{2(a^2+1)^2} - \frac{3a}{4(a^2+1)} + \frac{3}{4}\operatorname{Arctan} a.$$

L'aire $\mathscr{A}$ demandée est

$$\mathscr{A} = 2\lim_{a \to +\infty} \mathscr{A}_a = 2\left(0 + 0 + \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

3) a) On sait que

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \mathrm{Re}\,(\overline{z}z') = 1.$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. $z_{P_t} = \dfrac{t^3}{t^2+1} + i\dfrac{t^2}{t^2+1} = \dfrac{t^2}{t^2+1}(t+i)$ et donc

$$z_{U_t} = \frac{1}{\overline{z_{P_t}}} = \frac{t^2+1}{t^2} \times \frac{1}{t-i} = \frac{t+i}{t^2} = \frac{1}{t} + i\frac{1}{t^2}.$$

c) $\sigma(\Gamma \setminus \{O\})$ est donc le support de l'arc paramétré $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right.$. Une équation cartésienne du support est $y = x^2$, x décrivant $\mathbb{R}^*$. $\sigma(\Gamma \setminus \{O\})$ est donc la parabole d'équation $y = x^2$ privé du point O.

