JH22

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 MP

durée 4 heures

Problème

Notations

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E; l'ensemble des valeurs propres de f sera noté $Sp(f)$ (spectre de f). Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel $Ker\,(f-\lambda Id)$ de E, Id désignant l'application identique de E.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les éléments propres de X sont les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice X.
- On note $\Pi_f(X) = \det\,(X\mathrm{Id} - f)$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $\mathbb{R}^n$ rendu euclidien par le produit scalaire $\bullet$ défini par :

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad X \bullet Y = {}^tXY = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k y_k$$

où ${}^tX$ désigne la matrice transpoosée de X et où, grâce à une identification de $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble des matrices réelles de taille $(n,1)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$; on note f^* l'adjoint de f, endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f(X) \bullet Y = X \bullet f^*(Y).$$

- On rappelle que $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} |f(X) \bullet Y|, \quad \|f^*\| = \|f\| \quad$ et $\quad \|f\|^2 = \|f \circ f^*\|$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A; dans ces conditions on note $\Pi_A(X) = \Pi_f(X)$ et $\|A\| = \|f\|$, d'où $\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

- On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles A, c'est-à-dire telles que ${}^tA = A$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit $A \geqslant 0$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et ${}^tXAX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$; alors $\|A\| = \max\limits_{\lambda \in Sp(A)}(\lambda)$. On écrit $A > 0$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul (d'où $A \geqslant 0$).

- On appelle matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Pour toute application convexe f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et tous $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I^n$ et $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k = 1$, on a : $f\left(\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k\, a_k\right) \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k\, f(a_k)$.

Partie I

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-2 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\begin{cases} a_{i,i-1} = i-1 & \text{si} \quad 2 \leqslant i \leqslant n \\ a_{i,i+1} = i & \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases}$$

les autres coefficients étant nuls; enfin u est l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1°. Montrer que la matrice A admet n valeurs propres distinctes.

2°. On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à coefficients réels par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$ et, pour $n \geqslant 3$:

$$P_n(X) = \frac{X}{n-1} P_{n-1}(X) - \left(\frac{n-2}{n-1}\right) P_{n-2}(X).$$

Montrer que le polynôme caractéristique $\Pi_u(X)$ vérifie l'égalité suivante :

$$\Pi_u(X) = (n-1)!\,[X\, P_n(X) - (n-1)\, P_{n-1}(X)].$$

3°. En déduire $\det A$ en fonction de l'entier n.

4°. On note Co (A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

(a) Montrer que Co (A) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer la dimension de Co (A).

Partie II

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et D la matrice diagonale définie par $D = \operatorname{diag}(1, 3, 5, \ldots, 2n-1)$ soit :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 2n-3 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

ainsi que la matrice $B = D - A$ où A est la matrice de la première partie. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $X \mapsto q(X) = {}^tXBX$.

1°. Montrer que, pour tous $n \geqslant 2$ et $X \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^tXBX = n\,x_n^2 + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} i\,(x_i - x_{i+1})^2$.

2°. En déduire le rang et la signature de la forme q.

3°. *Application.* Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que la série $\sum u_k^2$ converge. On note :

$$U_n = \frac{\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k}{n}.$$

(a) Montrer que $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} U_j^2 \leqslant 2 \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} u_j\,U_j$.

(c) En déduire que la série $\sum U_n^2$ est convergente.

Partie III

Soient $n \geqslant 2$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, une matrice $S > 0$ et le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^n$ défini par $\varphi(X, Y) = {}^tXSY$.

1°. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ orthonormale pour le produit scalaire φ telle que la matrice de passage $[\mathcal{B}' : \mathcal{B}]$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure, et vérifie $S = {}^t[\mathcal{B}' : \mathcal{B}]^{-1}\,[\mathcal{B}' : \mathcal{B}]^{-1}$.

2°. Montrer que $\det S$ est inférieur ou égal au produit $\prod\limits_i s_{i,i}$ des éléments diagonaux de S.

Partie IV

Soient $n \geqslant 2$, et $U = (u_{i,j}) > 0$ une matrice dont on note $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les n valeurs propres, distinctes ou non; on suppose qu'il existe une série entière $\sum b_k\, x^k$ de somme $g(x)$ et de rayon de convergence $R > 0$ vérifiant $b_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $Sp(U) \subset \,]0, R[$. Enfin l'application $(\ln \circ g)$ est supposée convexe sur $]0, R[$.

1°. **(a)** Montrer que la suite $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} b_k\, U^k$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice $g(U) > 0$.

(b) Expliciter un majorant de det $g(U)$.

2°. **(a)** Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $V = (v_{i,j})$ telle que :

$$\forall i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad u_{i,i} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} v_{i,k}^2\, \alpha_k.$$

(b) Montrer que $0 < u_{i,i} < R$ pour tout i entre 1 et n.

(c) Montrer, en utilisant l'inégalité de convexité rappelée dans le préambule, que :

$$\det g(U) \geqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} g(u_{i,i}).$$

(d) Retrouver de même le résultat de la question **III 2°**.

Partie V

Soient $n \geqslant 2$ et U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $u_{i,i} = a$ pour tout i et $u_{i,j} = b$ pour $j \neq i$, avec $0 < b < a$. Soit enfin $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + \mathrm{e}^x$.

1°. En écrivant $U = (a - b)\, I_n + J$, déterminer le spectre de U.

2°. Montrer que la matrice U et la fonction g vérifient les hypothèses de la partie **IV**.

3°. Montrer qu'il existe un polynôme R de degré 2 annulateur de la matrice U.

4°. Exprimer U^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et l'exponentielle $\exp(U)$ en fonction de U et de I_n.

5°. Encadrer det $\left(I_n + \exp(U)\right)$ en fonction de a, b et n.

6°. Dans cette question, on suppose $n = 3$. Déterminer la nature de la quadrique d'équation ${}^tXUX = 1$ où X décrit $\mathbb{R}^3$.