SESSION 2000

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 MP

Exercice 1

1° **(a)** Soit $x \in E$.

$$x \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow p_F(g(x)) = 0 \Leftrightarrow g(x) \in F^\perp \Leftrightarrow x \in g^{-1}(F^\perp).$$

D'autre part, g est un automorphisme et donc $g(E) = E$. Puis

$$\mathrm{Im} f = p_F(g(E)) = p_F(E) = F.$$

$$\boxed{\mathrm{Ker} f = g^{-1}(F^\perp) \text{ et } \mathrm{Im} f = F.}$$

(b) D'une part,

$$(g^{-1} \circ p_F \circ g) \circ (g^{-1} \circ p_F \circ g) = g^{-1} \circ p_F^2 \circ g = g^{-1} \circ p_F \circ g.$$

D'autre part, $g \in \mathcal{O}(E)$ et donc $g^* = g^{-1}$ et p_F est une projection orthogonale et donc $p_F^* = p_F$. On en déduit que

$$(g^{-1} \circ p_F \circ g)^* = g^* \circ p_F^* \circ (g^{-1})^* = g^{-1} \circ p_F \circ g.$$

Ainsi, $g^{-1} \circ p_F \circ g$ est un endomorphisme idempotent et auto-adjoint et on sait que $g^{-1} \circ p_F \circ g$ est une projection orthogonale que l'on note $p_{F'}$. Ainsi, il existe un et un seul sous-espace vectoriel F' tel que $g^{-1} \circ p_F \circ g = p_{F'}$ ou encore tel que $p_F \circ g = g \circ p_{F'}$. Enfin, pour $x \in E$,

$$g^{-1} \circ p_F \circ g(x) = x \Leftrightarrow p_F(g(x)) = g(x) \Leftrightarrow g(x) \in F \Leftrightarrow x \in g^{-1}(F).$$

$$\boxed{F' = g^{-1}(F).}$$

(c) $f \circ f^* \circ f = p_F \circ g \circ g^{-1} \circ p_F \circ p_F \circ g = p_f \circ g = f$.

$$\boxed{f \circ f^* \circ f = f.}$$

2° **(a)** Puisque g est un automorphisme de E,

$$p_F \circ g = g \circ p_F \Leftrightarrow g \circ p_{F'} = g \circ p_F \Leftrightarrow p_{F'} = p_F \Leftrightarrow F' = F \Leftrightarrow g^{-1}(F) = F \Leftrightarrow F = g(F).$$

$$\boxed{p_F \circ g = g \circ p_F \Leftrightarrow g(F) = F.}$$

(b) Soient g et g' deux automorphismes orthogonaux de E commutant avec p_F. On a

$$(g \circ p_F) \circ (g' \circ p_F) = (g \circ g') \circ (p_F \circ p_F) = (g \circ g') \circ p_F.$$

Maintenant $g \circ g'$ est un automorphisme orthogonal de E vérifiant de plus $g \circ g'(F) = g(F) = F$ et donc commutant avec p_F. Par suite, $(g \circ p_F) \circ (g' \circ p_F)$ est un élément de $\mathcal{G}$. La restriction de la loi $\circ$ à $\mathcal{G}$ est donc une loi de composition interne dans $\mathcal{G}$.

Posons $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \to & \mathcal{O}(F) \\ g \circ p_f & \mapsto & g_{/F} \end{array}$.

• Tout d'abord si g est un élément de $\mathcal{O}(E)$ tel que $g \circ p_F = p_F \circ g$, alors $g(F) = F$ et donc $g_{/F} \in \mathcal{O}(F)$.
De plus, si $(g, g') \in (\mathcal{O}(E))^2$

$$g \circ p_F = g' \circ p_F \Leftrightarrow \forall x \in E,\ g(p_F(x)) = g'(p_F(x)) \Leftrightarrow \forall y \in F,\ g(y) = g'(y) \Leftrightarrow g_{/F} = g'_{/F}.$$

Les deux vérifications ci-dessus permettent d'affirmer que φ est une application.

• φ est injective car si g et g' sont deux automorphismes orthogonaux de E commutant avec p_F et tels que $g_F = g'_{/F}$ alors $g \circ p_F = g' \circ p_F$.

• Soit $h \in \mathcal{O}(F)$. Soit g l'automorphisme orthogonal tel que $g_{/F} = h$ et $g_{/F^\perp} = Id_{F^\perp}$. g est un automorphisme orthogonal de E tel que $g(F) = F$ et donc $g \circ p_F$ est un élément de $\mathcal{G}$. De plus, par construction, $\varphi(g \circ p_F) = h$. Ceci montre montre que φ est surjective et donc une bijection.

• Soit alors g et g' deux automorphismes orthogonaux de E commutant avec p_F.

$$\begin{aligned}\varphi((g \circ p_F) \circ (g' \circ p_F)) &= \varphi((g \circ g') \circ p_F) \text{ (puisque } g \text{ et } g' \text{ commutent avec } p_F) \\ &= (g \circ g')_{/F} = g_{/F} \circ g'_{/F} \text{ (puisque } g'(F) = F) \\ &= \varphi(g \circ p_F) \circ \varphi(g' \circ p_F).\end{aligned}$$

Ainsi, φ est donc un isomorphisme du magma $(\mathcal{G}, \circ)$ sur le groupe $(\mathcal{O}(F), \circ)$ et donc

$$\boxed{(\mathcal{G}, \circ) \text{ est un groupe isomorphe au groupe } (\mathcal{O}(F), \circ).}$$

L'image de tout élément de $\mathcal{G}$ est $F \underset{\neq}{\subset} E$ et donc $\mathcal{G}$ ne contient pas Id_E. En particulier,

$$\boxed{\mathcal{G} \text{ n'est pas un sous-groupe du groupe } (\mathcal{O}(E), \circ).}$$

(c) Soit g un automorphisme orthogonal.

$$p_F(g(p_F(g(E)))) = p_F(g(p_F(E))) = p_F(g(F)).$$

Montrons que l'on peut choisir g de sorte que $p_F(g(F)) \neq F$. Ceci empêchera $(p_F \circ g) \circ (p_F \circ g)$ d'être de la forme $p_F \circ g'$ avec $g' \in \mathcal{O}(E)$, puisque tous les $p_F \circ g'$ ont pour image F.

On complète une base orthonormée $(e_1, ..., e_p)$ de F ($1 \leq p \leq n-1$ car $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$) en une base orthonormée $(e_1, ..., e_p, ..., e_n)$ de E. Soit g défini par $g(e_1) = e_{p+1}$, $g(e_{p+1}) = e_1$ et $g(e_i) = e_i$ sinon. g est un automorphisme orthogonal de E puisque l'image par g de la base orthonormée $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ est la base orthonormée $(e_{p+1}, ..., e_p, e_1, ..., e_n)$. De plus,

$$p_F(g(F)) = p_F(\text{Vect}(g(e_1), ..., g(e_p))) = p_F(\text{Vect}(e_{p+1}, e_2, ..., e_p)) = \text{Vect}(e_2, ..., e_p) \neq F,$$

ce qu'il fallait démontrer. Donc,

$$\boxed{\text{l'ensemble des } p_F \circ g \text{ obtenu lorsque } g \text{ décrit } \mathcal{O}(E) \text{ n'est pas stable par l'opération de composition.}}$$

3° **(a)** $(f \circ f^*) \circ (f \circ f^*) = (f \circ f^* \circ f) \circ f^* = f \circ f^*$ et $(f \circ f^*)^* = f \circ f^*$. Donc

$$\boxed{f \circ f^* \text{ est une projection orthogonale.}}$$

(b) Soit $x \in (\text{Ker} f)^\perp$.

$$\|f(x)\|^2 - \|x\|^2 = < f(x), f(x) > - < x, x > = < f^* \circ f(x), x > - < x, x > = < f^* \circ f(x) - x, x >.$$

Mais $f(f^* \circ f(x) - x) = f \circ f^* \circ f(x) - f(x) = 0$. Par suite, $f^* \circ f(x) - x \in \text{Ker} f$. Comme $x \in (\text{Ker} f)^\perp$, on a donc

$$\|f(x)\|^2 - \|x\|^2 = < f^* \circ f(x) - x, x > = 0.$$

$$\boxed{\forall x \in (\text{Ker} f)^\perp,\ \|f(x)\| = \|x\|.}$$

(c) D'après (a), $f \circ f^*$ est une projection orthogonale par rapport à un certain sous-espace F, que l'on note p_F. On a déjà $F = \text{Im}(f \circ f^*) \subset \text{Im} f$

Vérifions que $f \circ f^*$ et f^* ont même noyau. Il est clair que $\text{Ker} f^* \subset \text{Ker}(f \circ f^*)$. Réciproquement, pour $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}(f \circ f^*) \Rightarrow f \circ f^*(x) = 0 \Rightarrow < f \circ f^*(x), x > = 0 \Rightarrow < f^*(x), f^*(x) > = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker} f^*.$$

Ainsi, $\text{Ker}(f \circ f^*) = \text{Ker} f^*$. On en déduit que $\text{rg}(f \circ f^*) = \text{rg} f^* = \text{rg} f$ et puisque $\text{Im}(f \circ f^*) \subset \text{Im} f$, on a finalement $\text{Im}(f \circ f^*) = \text{Im} f$. Ceci montre que

$$\boxed{f \circ f^* \text{ est la projection orthogonale sur } F = \text{Im} f.}$$

$(\text{Ker} f)^\perp$ est un supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans E et on sait que la restriction de f à $(\text{Ker} f)^\perp$ induit un isomorphisme de $(\text{Ker} f)^\perp$ sur $\text{Im} f$. La question (b) montre que cette restriction est une isométrie que l'on note g'. Il existe d'autre part une isométrie g'' de $\text{Ker} f$ sur $(\text{Im} f)^\perp$ (puisque ces sous-espaces ont même dimension). Soit g l'endomorphisme de E dont les restrictions à $(\text{Ker} f)^\perp$ et $\text{Ker} f$ sont respectivement g' et g''. g est une automorphisme orthogonal de E car l'image d'une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = (\text{Ker} f)^\perp \oplus \text{Ker} f$ est une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = \text{Im} f \oplus (\text{Im} f)^\perp$.

Maintenant, si x est dans $\text{Ker} f$, $p_F(g(x)) = 0 = f(x)$ car $g(x) \in (\text{Im} f)^\perp = F^\perp$ et si x est dans $(\text{Ker} f)^\perp$, $p_F(g(x)) = (f \circ f^*)(f(x) = f(x)$ par définition de g_1 et puisque $f \circ f^* \circ f = f$. Les endormorphismes f et $p_F \circ g$ coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires de E et donc $f = p_F \circ g$.

Exercice 2

1° **(a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.

• **Etude au voisinage de 0.** $\dfrac{t^x}{1+t^2} \underset{x \to 0}{\sim} t^x > 0$. Or, la fonction $t \mapsto t^x$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $x > -1$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+t^2}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $x > -1$.

• **Etude au voisinage de $+\infty$.** $\dfrac{t^x}{1+t^2} \underset{x \to 0}{\sim} t^{x-2} > 0$. Or, la fonction $t \mapsto t^{x-2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $x - 2 < -1$ ce qui équivaut à $x < 1$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $x < 1$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $-1 < x < 1$.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est }]-1, 1[.}$$

(b) Soient t un réel strictement positif donné et $x \in]-1, 1[$. $\dfrac{t^x}{(1+t)^2} = \dfrac{1}{(1+t)^2} e^{x \ln t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} \dfrac{x^n}{n!}$.

$$\boxed{\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times]-1, 1[, \quad \frac{t^x}{(1+t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} \frac{x^n}{n!}.}$$

2° **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln t)^n \, dt$.

• **Existence de I_n.** La fonction $t \mapsto (\ln t)^n$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $(\ln t)^n = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 à droite, la fonctiont $\mapsto (\ln t)^n$ est intégrable sur $]0, 1]$. Finalement, pour tout naturel n, I_n existe.

• **Calcul de I_n.** Tout d'abord $I_0 = \displaystyle\int_0^1 dt = 1$.

Soient alors $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto (\ln t)^{n+1}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_\varepsilon^1 (\ln t)^{n+1} \, dt = \left[t(\ln t)^{n+1}\right]_\varepsilon^1 - (n+1) \int_\varepsilon^1 (\ln t)^n \, dt = -\varepsilon(\ln \varepsilon)^{n+1} - (n+1) \int_\varepsilon^1 (\ln t)^n \, dt.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $I_{n+1} = -(n+1) I_n$. En résumé, $I_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ I_{n+1} = -(n+1) I_n$. Mais alors par récurrence on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 (\ln t)^n \, dt = (-1)^n n!.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in]0,1]$, on a $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{(1+t)^2} \leq 1$ et donc $\dfrac{|\ln t|^n}{4} \leq \dfrac{|\ln t|^n}{(1+t)^2} \leq |\ln t|^n$. Mais alors, par croissance de l'intégrale et d'après (a)

$$\frac{n!}{4} = \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{4}\, dt \leq \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2}\, dt \leq \int_0^1 |\ln t|^n\, dt = n!.$$

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n!}{4} \leq \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2}\, dt \leq n!.}$$

3° **(a)** La fonction $t \mapsto \dfrac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ au voisinage de $+\infty$. La fonction $t \mapsto \dfrac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}$ est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} = u$ est une bijection de classe C^1 de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$. On peut donc poser $u = \dfrac{1}{t}$ et on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\, dt = \int_1^0 \frac{(\ln(1/u))^n}{(1+\frac{1}{u})^2}\, -\frac{du}{u^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{(\ln u)^n}{(1+u)^2}\, du.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\, dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\, dt.}$$

(b) On rappelle que $\forall (t,x) \in]0,+\infty[\times]-1,1[$, $\dfrac{t^x}{(1+t)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\frac{x^n}{n!}$. Il s'agit de vérifier que l'on peut intégrer cette égalité terme à terme sur $]0,+\infty[$.

Soit $x \in]-1,1[$ fixé. Pour $t \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(t) = \dfrac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\dfrac{x^n}{n!}$. Pour $t \in]0,+\infty[$, on pose encore $g(t) = \dfrac{t^x}{(1+t)^2}$.

- Chaque fonction g_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ et la série de fonctions de terme général g_n converge simplement vers g sur $]0,+\infty[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\, dt &= \frac{|x|^n}{n!}\left(\int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2}\, dt\right) = \frac{|x|^n}{n!}\left((-1)^n\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\, dt\right)\\ &= \frac{2|x|^n}{n!}(-1)^n\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\, dt \text{ (d'après 3°(a))}\\ &= \frac{2|x|^n}{n!}\int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2}\, dt\\ &\leq \frac{2|x|^n}{n!} \times n! = 2|x|^n \text{ (d'après 2°(b)).}\end{aligned}$$

Comme $x \in]-1,1[$, la série numérique de terme général $2|x|^n$ converge et il en est de même de la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\, dt$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, on sait que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\, dt\right)\frac{x^n}{n!}.}$$

Le rayon de convergence R de la série précédente est au moins égal à 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\,dt = \dfrac{1+(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a d'après 2°(b)

$$a_{2n} = \frac{2}{(2n)!}\int_0^1 \frac{(\ln t)^{2n}}{(1+t)^2}\,dt \geq \frac{2}{(2n)!} \times \frac{(2n)!}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la suite (a_n) ne tend pas vers 0. On en déduit que $R \leq 1$ et finalement

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[\text{ et le rayon de la série obtenue est } 1.}$$

4° (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto t^{1/2p} = u$ est une bijection de classe C^1 de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. On peut donc poser $u = t^{1/2p}$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^{2p})^2}\,(2p)u^{2p-1}du = \int_0^{+\infty} u\frac{(2p)u^{2p-1}}{(1+u^{2p})^2}\,du.$$

Soient alors ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Une intégration par parties fournit

$$\int_\varepsilon^A u\frac{(2p)u^{2p-1}}{(1+u^{2p})^2}\,du = \left[-u\frac{1}{1+u^{2p}}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1}{1+u^{2p}}\,du = -\varepsilon\frac{1}{1+\varepsilon^{2p}} + A\frac{1}{1+A^{2p}} + \int_\varepsilon^A \frac{1}{1+u^{2p}}\,du.$$

Quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{2p}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}}\,du.}$$

(b) Les racines du polynôme $P = X^{2p}+1$ sont toutes simples car P n'a aucune racine en commun avec $P' = 2pX^{2p-1}$. Ces racines sont les racines $2p$-èmes de -1 à savoir les $\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{2p}+\frac{k\pi}{p})}$, $-p \leq k \leq p-1$. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P}$ sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=-p}^{p-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k},$$

avec

$$\lambda_k = \frac{1}{P'(\omega_k)} = \frac{1}{2p\omega_k^{2p-1}} = \frac{\omega_k}{2p\omega_k^{2p}} = -\frac{\omega_k}{2p}.$$

$$\boxed{\frac{1}{1+u^{2p}} = -\frac{1}{2p}\sum_{k=-p}^{p-1} \frac{\omega_k}{X-\omega_k} \text{ où } \omega_k = e^{i(\frac{\pi}{2p}+\frac{k\pi}{p})},\ k \in [\![-p,p-1]\!].}$$

(c) Par suite

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}}\,du = \left[-\frac{1}{2p}\sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k(\ln|u-\omega_k| + i\arg(u-\omega_k))\right]_0^{+\infty}.$$

Pour $u \in [0,+\infty[$, posons $F(u) = \displaystyle\sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \ln|u-\omega_k|$. Déjà, puisque les ω_k sont de module 1, on a $F(0) = 0$. Ensuite, on sait que $\displaystyle\sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k = 0$. Par suite, pour $u > 0$,

$$F(u) = \left(\sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k\right) \ln u + \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \ln\left|1 - \frac{\omega_k}{u}\right| = \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \ln\left|1 - \frac{\omega_k}{u}\right|,$$

et donc $\lim\limits_{u \to +\infty} F(u) = 0$. Il reste

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}}\, du = \left[-\frac{i}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \arg(u - \omega_k)\right]_0^{+\infty}.}$$

(d) Pour $u > 1$, on a $\forall k \in [\![-p, p-1]\!]$, $\mathrm{Re}(u - \omega_k) > 0$ et donc

$$\arg(u - \omega_k) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(u - \omega_k)}{\mathrm{Re}(u - \omega_k)}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(-\omega_k)}{\mathrm{Re}(u - \omega_k)}\right).$$

Par suite,

$$\lim_{u \to +\infty} \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \arg(u - \omega_k) = \lim_{u \to +\infty} \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(-\omega_k)}{\mathrm{Re}(u - \omega_k)}\right) = 0.$$

Il reste

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}}\, du &= \frac{i}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} \omega_k \arg(-\omega_k) = \frac{i}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} (-\omega_k) \arg(\omega_k) \text{ (les } \omega_k \text{ étant deux à deux opposés)}\\ &= -\frac{i}{2p} \sum_{k=-p}^{p-1} e^{i\pi/2p} \alpha^k \left(\frac{\pi}{2p} + \frac{k\pi}{p}\right) = -\frac{i\pi e^{i\pi/2p}}{(2p)^2} \sum_{k=-p}^{p-1} \alpha^k - \frac{i\pi e^{i\pi/2p}}{2p^2} \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^k.\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=-p}^{p-1} \alpha^k = \alpha^{-p} \frac{1 - \alpha^{2p}}{1 - \alpha} = \alpha^{-p} \frac{1-1}{1-\alpha} = 0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}(1-\alpha) \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^k &= \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^k - \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^{k+1} = \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^k - \sum_{k=-(p-1)}^{p} (k-1)\alpha^k\\ &= -p\alpha^{-p} + \sum_{k=-(p-1)}^{p-1} \alpha^k - (p-1)\alpha^p = -(p+1)\alpha^{-p} - (p-1)\alpha^p = (p+1) + (p-1)\\ &= 2p.\end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}}\, du = -\frac{i\pi e^{i\pi/2p}}{2p^2} \frac{2p}{1 - e^{ip\pi}} = -\frac{i\pi}{p} \frac{1}{e^{-i\pi/2p} - e^{i\pi/2p}} = -\frac{i\pi}{p} \frac{1}{-2i\sin(\pi/2p)} = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{2p}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\, dt = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}.}$$

5° Puisque f est développable en série entière sur $]-1,1[$ de même que la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$, la fonction $g : x \mapsto \pi x - f(x)\sin(\pi x)$ est dévellopable en série entière sur $]-1,1[$. Posons alors

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \pi x - f(x)\sin(\pi x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Supposons par l'absurde que g ne soit pas nulle sur $]-1,1[$. Alors, il existe au moins un coefficient a_n non nul et on peut considérer l'entier naturel $p = \text{Min}\{n \in \mathbb{N}/\ a_n \neq 0\}$. On sait alors que

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + o(x^p).$$

Par suite, la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^p}$ a une limite réelle non nulle quand x tend vers 0 ce qui montre en particulier que g ne s'annule pas sur un intervalle de la forme $]0,\alpha[$, $\alpha > 0$. Ceci contredit le fait que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\dfrac{1}{2p}\right) = 0$. Donc g est nulle sur $]-1,1[$ et on a montré que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2}\,dt = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.}$$

Exercice 3

1° Soit $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} \in \mathcal{D}\cap\mathcal{R}$. Alors $x^2+y^2+z^2$ est un entier et cet entier est nul si et seulement si $x=y=z=0$ ou encore $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
Soit $\mathscr{P} = \left\{x^2+y^2+z^2,\ x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} \in \mathcal{D}\cap\mathcal{R}\setminus\{\overrightarrow{0}\}\right\}$. $\mathscr{P}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et donc $\mathscr{P}$ admet un plus petit élément.

Soit $\overrightarrow{u} = x_0\overrightarrow{a} + y_0\overrightarrow{b} + z_0\overrightarrow{c}$ un élément non nul de $\mathcal{D}\cap\mathcal{R}$ tel que $x^2+y^2+z^2$ soit minimum.

• $\mathcal{D}\cap\mathcal{R}$ est un sous-groupe de $(E,+)$ en tant qu'intersection de sous-groupes de $(E,+)$. Puisque $\overrightarrow{u} \in \mathcal{D}\cap\mathcal{R}$, $\mathcal{D}\cap\mathcal{R}$ contient encore les $\lambda\overrightarrow{u}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ et donc

$$\mathbb{Z}\overrightarrow{u} \subset \mathcal{R}\cap\mathcal{D}.$$

• Réciproquement, soit $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} \in \mathcal{D}\cap\mathcal{R}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$. Mais alors le vecteur $\overrightarrow{v} - E(\lambda)\overrightarrow{u} = (\lambda - E(\lambda))\overrightarrow{u}$ est encore dans $\mathcal{D}\cap\mathcal{R}$ (où $E(\lambda)$ désigne la partie entière du réel λ). De plus,

$$\overrightarrow{v} - E(\lambda)\overrightarrow{u} = (\lambda - E(\lambda))(x_0\overrightarrow{a} + y_0\overrightarrow{b} + z_0\overrightarrow{c}),$$

avec

$$((\lambda - E(\lambda))x_0)^2 + ((\lambda - E(\lambda))y_0)^2 + ((\lambda - E(\lambda))z_0)^2 = (\lambda - E(\lambda))^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2) < (x_0^2+y_0^2+z_0^2).$$

Par définition de $\overrightarrow{u}$, on a alors $\overrightarrow{v} - E(\lambda)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{v} = E(\lambda)\overrightarrow{u} \in \mathbb{Z}\overrightarrow{u}$. Ceci montre que $\mathcal{R}\cap\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}\overrightarrow{u}$ et finalement que

$$\boxed{\mathcal{D}\cap\mathcal{R} = \mathbb{Z}\overrightarrow{u}.}$$

2° **(a)**

$$(\overrightarrow{a}|\overrightarrow{A}) = \frac{1}{\Delta}(\overrightarrow{a}|(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c})) = \frac{1}{\Delta}[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}] = 1,$$

et

$$(\overrightarrow{b}|\overrightarrow{A}) = \frac{1}{\Delta}(\overrightarrow{b}|(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c})) = \frac{1}{\Delta}[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{b}] = 0.$$

De même, $(\overrightarrow{c}|\overrightarrow{A}) = 0$ et aussi $(\overrightarrow{b}|\overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{c}|\overrightarrow{C}) = 1$ et $(\overrightarrow{a}|\overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{c}|\overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{a}|\overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{b}|\overrightarrow{C}) = 0$. Finalement,

$$\boxed{\forall (x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^6,\ (x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}|\alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}) = x\alpha + y\beta + z\gamma.}$$

(b) Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C} = \overrightarrow{0} &\Rightarrow \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}|\alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}) = 0 \Rightarrow \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x\alpha + y\beta + z\gamma = 0\\ &\Rightarrow (\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}^3)^{\perp}\ (\mathbb{R}^3 \text{ étant muni du produit scalaire usuel})\\ &\Rightarrow (\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0).\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B},\overrightarrow{C})$ est une famille libre de E et puisque $\text{card}(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B},\overrightarrow{C}) = 3 = \dim(E) < +\infty$,

$$\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{A},\overrightarrow{B},\overrightarrow{C}) \text{ est une base de } E.}$$

3° Soient $\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{a} + y\,\overrightarrow{b} + z\,\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{t} = x'\,\overrightarrow{a} + y'\,\overrightarrow{b} + z'\,\overrightarrow{c}$ deux éléments de $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{t} &= (x\,\overrightarrow{a} + y\,\overrightarrow{b} + z\,\overrightarrow{c}) \wedge (x'\overrightarrow{a} + y'\,\overrightarrow{b} + z'\,\overrightarrow{c})\\ &= (yz' - zy')(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) - (xz' - zx')(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) + (xy' - yx')(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})\\ &= \Delta((yz' - zy')\overrightarrow{A} - (xz' - zx')\overrightarrow{B} + (xy' - yx')\overrightarrow{C}),\end{aligned}$$

et donc

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \Delta^2((yz' - zy')^2 + (xz' - zx')^2 + (xy' - yx')^2).$$

Ceci montre que $X^2 + Y^2 + Z^2$ est un entier naturel et que cet entier naturel est nul si et seulement si $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{t} = \overrightarrow{0}$ (car $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})$ est une base de E).

Soit $\mathscr{P} = \left\{X^2 + Y^2 + Z^2,\ (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}) \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{R})^2,\ (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}) \text{ libre}\right\}$. $\mathscr{P}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et donc $\mathscr{P}$ admet un plus petit élément.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux éléments de $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ tels que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ libre et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ de norme minimum.

• $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ est un sous-groupe de $(E, +)$ et puisque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ contient encore les $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$. Par suite,

$$\mathbb{Z}\overrightarrow{u} + \mathbb{Z}\overrightarrow{v} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{R}.$$

• Réciproquement, soit $\overrightarrow{w} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R}$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$. Mais alors le vecteur $\overrightarrow{w} - E(\lambda)\overrightarrow{u} - E(\mu)\overrightarrow{v} = (\lambda - E(\lambda))\overrightarrow{u} + (\mu - E(\mu))\overrightarrow{v}$ est encore dans $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$.

Maintenant, si on pose $\overrightarrow{u} \wedge \left((\lambda - E(\lambda))\overrightarrow{u} + (\mu - E(\mu))\overrightarrow{v}\right) = X\overrightarrow{A} + Y\overrightarrow{B} + Z\overrightarrow{C}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = X_0\,\overrightarrow{A} + Y_0\,\overrightarrow{B} + Z_0\,\overrightarrow{C}$, on a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (\lambda - E(\lambda))^2(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) < X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2,$$

et donc $\lambda - E(\lambda) = 0$. De même, en faisant le produit vectoriel avec $\overrightarrow{v}$, on obtient $\mu - E(\mu) = 0$. Ainsi, λ et μ sont des entiers et on a montré que

$$\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\overrightarrow{u} + \mathbb{Z}\overrightarrow{v}.}$$

4° **(a)** Notons $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ (où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont été définis à la question précédente). $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Soit alors $\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{a} + y\,\overrightarrow{v} + z\,\overrightarrow{c} \in \mathcal{R}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{w}|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0 \Leftrightarrow (x\,\overrightarrow{a} + y\,\overrightarrow{v} + z\,\overrightarrow{c}|\alpha'\overrightarrow{A} + \beta'\overrightarrow{B} + \gamma'\overrightarrow{C}) = 0\\ &\Leftrightarrow \alpha'x + \beta'y + \gamma'z = 0 \text{ (d'après 2°(a)).}\end{aligned}$$

De plus, en divisant les deux membres de cette dernière égalité par le PGCD de α', β' et γ', on obtient une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ où cette fois-ci α, β et γ sont premiers entre eux.

(b) Il est clair que tout élément de $\mathcal{R}$ appartient à exactement un et un seul des $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{R}$. De plus, α, β et γ sont premiers entre eux et on sait que pour tout entier relatif k, l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ a au mois une solution $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ ce qui montre qu'aucun des $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{R}$ n'est vide. Finalement

$$\boxed{(\mathcal{P}_k \cap \mathcal{R})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est une partition de } \mathcal{R}.}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Soient M un point de $\mathcal{P}_k$ et M' son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}_{k+1}$. Puisque $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ sont parallèles, la distance cherchée est MM'. On a $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{N}) = k$ et $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{N}) = k + 1$. Par suite, $|(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{N})| = 1$. Maintenant, $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{N}$ et donc

$$|(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{N})| = MM' \times \|\overrightarrow{N}\| = d(\mathcal{P}_k, P_{k+1}) \times \|\overrightarrow{N}\|,$$

et finalement

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ d(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_{k+1}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{N}\|}.}$$

