SESSION 2019

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP

I - Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A -

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\chi_{M^T} \det\left(XI_n - M^T\right) = \det\left(\left(XI_n - M\right)^T\right) = \det\left(XI_n - M\right) = \chi_M$. Donc, M et M^T ont même spectre.

2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si M^T est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ telles que $M^T = PDP^{-1}$. On sait que P est inversible si et seulement P^T est inversible et en transposant, on obtient $M = \left(P^T\right)^{-1} DP^T$. Donc, M est semblable à une matrice diagonale ou encore, M est diagonalisable. Réciproquement, en appliquant le résultat précédent à M^T, si M est diagonalisable, alors M^T est diagonalisable. Ainsi, M^T est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B - Matrices compagnons

3. $\chi_{C_Q} = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$. En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\chi_{C_Q} = (X + a_{n-1})\, X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+n+1} a_k \Delta_k = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+n+1} a_k \Delta_k$$

où Δ_k est un déterminant diagonal par blocs : $\Delta_k = \det\begin{pmatrix} A_k & \times \\ 0_{k,n-1-k} & B_k \end{pmatrix} = \det(A_k)\det(B_k)$ avec $A_k \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K})$ et $B_k \in \mathscr{M}_{n-1-k}(\mathbb{K})$. $\det(A_k)$ est un déterminant triangulaire inférieur de format k dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à X et donc $\det(A_k) = X^k$. $\det(B_k)$ est un déterminant triangulaire supérieur de format $n - 1 - k$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à -1 et donc $\det(B_k) = (-1)^{n-1-k}$. Finalement,

$$\begin{aligned}\chi_{C_Q} &= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+n+1}(-1)^{n-1-k} a_k X^k = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k \\ &= X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = Q.\end{aligned}$$

4. Soit λ une valeur propre de C_Q^T. La matrice $A - \lambda C_Q^T$ n'est pas inversible et donc de rang au plus $n - 1$. Mais la matrice extraite constituée des $n-1$ premières lignes et $n-1$ dernières colonnes de la matrice $A - \lambda C_Q^T$ est inversible, car triangulaire inférieure à coefficients diagonaux tous égaux à -1. Donc, $A - \lambda C_Q^T$ est une matrice de rang $n - 1$. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)) = 1$. Donc, $E_\lambda\left(C_Q^T\right)$ est une droite vectorielle.

Soit $X = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$X \in E_\lambda\left(C_Q^T\right) \Leftrightarrow C_Q^T X = \lambda X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -a_0 x_1 - a_1 \lambda x_1 - \ldots - a_{n-1} \lambda^{n-1} x_1 = \lambda^n x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ Q(\lambda) x_1 = 0 \end{array}\right. .$$

Maintenant, $Q(\lambda) = \chi_{C_Q^T}(\lambda) = 0$ et donc $X \in E_\lambda\left(C_Q^T\right) \Leftrightarrow \forall k \in [\![2, n]\!],\ x_k = \lambda^{k-1} x_1$. Donc,

$$E_\lambda\left(C_Q^T\right) = \text{Vect}\left(u_\lambda\right) \text{ où } u_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}.$$

I.C - Endomorphismes cycliques

5. Supposons f cyclique. Il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{B} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E (en particulier, $\dim(E) = n$). Le vecteur $f\left(f^{n-1}(x_0)\right) = f^n(x_0)$ s'écrit dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme

$$f^n(x_0) = -a_0 x_0 - a_1 f(x_0) - \ldots - a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est C_Q.

Réciproquement, supposons qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est C_Q. Alors, $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f(e_2), \ldots, e_n = f(e_{n-1})$ puis $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f^2(e_1), \ldots, e_n = f^{n-1}(e_1)$. Mais alors, $\left(e_1, f(e_1), \ldots, f^{n-1}(e_1)\right) = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et donc f est cyclique.

En résumé, f est cyclique si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon.

6. Soit f un endomorphisme cyclique. Si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, on sait que f est diagonalisable.

Réciproquement, supposons f diagonalisable. Alors, C_Q est diagonalisable puis C_Q^T est diagonalisable.
Nécessairement, $\chi_f = \chi_{C_Q^T} = \chi_{C_Q} = Q$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de C_Q^T est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. D'après la question 4, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles et donc chaque valeur propre est simple.

En résumé, f est diagonalisable si et seulement si Q est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

7. Soit f un endomorphisme cyclique. Soit $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{B} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 f + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$. En évaluant en x_0, on obtient $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$ puis $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ car la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est libre. Ceci montre que la famille $\left(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre.

Dit autrement, il n'existe pas de polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f. Donc, π_f est de degré supérieur ou égal à n. Mais d'autre part, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, π_f divise χ_f et en particulier, π_f est de degré inférieur ou égal à n. Finalement, π_f est de degré n exactement. Plus précisément, puisque π_f divise χ_f, que π_f et χ_f ont même degré et sont unitaires, on a $\pi_f = \chi_f = Q$.

I.D - Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. Soit f un endomorphisme quelconque de E. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Soit $\mathscr{E} = \left\{k \in \mathbb{N}^* /\ \left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right) \text{ libre}\right\}$. $\mathscr{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ car contient 1 (car $x \neq 0$), et majorée car le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension n de E. $\mathscr{E}$ admet donc un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.

Par définition de p, la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre et la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x), f^p(x)\right)$ est liée. On sait alors que $f^p(x) \in \text{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ et donc il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $f^p(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) - \ldots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x)$ ou encore $\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \ldots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$.

9.

$$
\begin{aligned}
f\left(\operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1} x\right)\right)\right) &= \operatorname{Vect}\left(f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x), f^p(x)\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x), -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) - \ldots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x)\right) \\
&\subset \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right).
\end{aligned}
$$

Donc, $F = \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}x\right)$ est stable par f.

10. Notons f' l'endomorphisme de F induit par f et notons $\mathscr{B}' = \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$. $\mathscr{B}'$ est une base de F (car génératrice de F et libre). On sait que le polynôme caractéristique de f' divise le polynôme caractéristique de f.
La matrice de f' dans $\mathscr{B}'$ est la matrice compagnon associée au polynôme $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$. Donc, $\chi_{f'} = X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$. Mais alors, $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$ divise χ_f.

11. Soit x un vecteur non nul. Soit $Q = X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$ associé à x comme à la question précédente. Il existe un polynôme R tel que $\chi_f = R \times Q$ puis $\chi_f(f) = R(f) \circ Q(f)$. En évaluant en x, on obtient

$$\chi_f(f)(x) = R(f)(Q(f)(x)) = R(f)(0) = 0.$$

Ainsi, pour tout vecteur non nul x, $\chi_f(f)(x) = 0$ et donc $\chi_f(f) = 0$.

II - Etude des endomorphismes cycliques

II.A - Endomorphismes cycliques nilpotents

12. On sait que $r \leqslant n$ (conséquence du théorème de Cayley-Hamilton).

Supposons f cyclique. Il existe $x_0 \in E$ tel que $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E. On ne peut avoir $f^{n-1}(x_0) = 0$ et donc $n - 1 < r$ ou encore $n \leqslant r$. Par suite, $r = n$.

Supposons que f est nilpotent d'indice n ou encore supposons que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tel que $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$. Soit k le plus petit des entiers $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Par définition de k, on a $\alpha_k f^k(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$. En prenant l'image des deux membres par f^{n-1-k}, on obtient

$$0 = \alpha_k f^{n-1}(x_0) + \alpha_{k+1} f^n(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{2n-1-k}(x_0) = \alpha_k f^{n-1}(x_0)$$

car pour $i \geqslant n$, $f^i = 0$. Ceci est absurde car $\alpha_k \neq 0$ et $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. Ceci montre que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est libre. Puisque $\operatorname{card}\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right) = n = \dim(E) < +\infty$, $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E et donc f est cylique.

On a montré qu'un endomorphisme nilpotent d'indice $r \in [\![1, n]\!]$ est cyclique si et seulement si $r = n$. Immédiatement, la matrice de f dans la base $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est la matrice compagnon $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II.B -

13. Les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$, $k \in [\![1, p]\!]$, sont deux à deux premiers entre eux. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_k)^{m_k}\right) = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k.$$

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Deux polynômes en f commutent et en particulier f et $(f - \lambda_k)^{m_k}$ commutent. On sait alors que $\operatorname{Ker}\left((f - \lambda_k)^{m_k}\right) = F_k$ est stable par f.

14. F_k est encore stable par $f - \lambda_k \mathrm{Id}_E$ et donc φ_k est un endomorphisme de F_k. Par définition de F_k, pour tout $x \in F_k$,

$$\varphi_k^{m_k}(x) = \left(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{F_k}\right)^{m_k}(x) = 0$$

et donc φ_k est nilpotent d'indice inférieur ou égal à m_k.

15. On sait que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est inférieur ou égal à la dimension de l'espace (conséquence du théorème de CAYLEY-HAMILTON) et donc $\nu_k \leqslant \dim(F_k)$.

16. Par hypothèse, la famille $\left(Id_E, f, \dots, f^{n-1}\right)$ est libre et donc, il n'existe pas de polynôme non nul de degré strictement inférieur à n et annulateur de f.
Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a déjà $\nu_k \leqslant m_k$. Supposons par l'absurde que $\nu_k < m_k$. Vérifions que $F_k = \text{Ker}\left((f-\lambda_k Id_E)^{\nu_k}\right)$. Déjà, puisque $\nu_k \leqslant m_k$, pour $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}\left((f-\lambda_k Id_E)^{\nu_k}\right) \Rightarrow (f-\lambda_k Id_E)^{\nu_k}(x) = 0 \Rightarrow f^{m_k-\nu_k}\left((f-\lambda_k Id_E)^{\nu_k}(x)\right) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}\left((f-\lambda_k Id_E)^{m_k}\right)$$

et donc $\text{Ker}\left((f-\lambda_k Id_E)^{\nu_k}\right) \subset F_k$. D'autre part, par définition de ν_k, pour $x \in E$,

$$x \in F_k \Rightarrow (f-\lambda_k Id_E)^{\nu_k}(x) = 0$$

et donc $F_k \subset \text{Ker}\left((f-\lambda_k Id_E)^{\nu_k}\right)$. Finalement, $F_k = \text{Ker}\left((f-\lambda_k Id_E)^{\nu_k}\right)$.

Soit $P = (X-\lambda_k)^{\nu_k} \times \prod_{i \neq k} (X-\lambda_i)^{m_i}$. P est un polynôme de degré

$$\nu_k + \sum_{i \neq k} m_i < m_k + \sum_{i \neq k} m_i = n.$$

Vérifions que P est annulateur de f. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, posons $m'_i = \begin{cases} m_i \text{ si } i \neq k \\ \nu_k \text{ si } i = k \end{cases}$. Soient $i \in [\![1,p]\!]$ puis $x \in F_i = \text{Ker}\left((f-\lambda_i Id_e)^{m'_i}\right)$. Puisque des polynômes en f commutent,

$$P(f)(x) = \prod_{i \neq k} (f-\lambda_i Id_E)^{m'_i}\left((f-\lambda_i Id_E)^{m'_k}(x)\right) = 0.$$

L'endomorphisme $P(f)$ s'annule donc sur les sous-espaces supplémentaires $F_1, \dots, F_p$. On en déduit que $P(f) = 0$. Mais ceci est impossible car $P(f)$ est un polynôme non nul de degré strictement inférieur à n. Donc, $\nu_k = m_k$.

17. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\dim(F_k) \geqslant \nu_k = m_k$. S'il existe $k \in [\![1,p]\!]$ tel que $\dim(F_k) > m_k$, alors

$$n = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) > \sum_{i=1}^{p} m_i = n.$$

Ceci est impossible et donc : $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\dim(F_k) = m_k$.

Dans une base quelconque adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, la matrice de f est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$ où, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, A_k est une matrice carrée de format $\dim(F_k) = m_k$.

Soit $k \in [\![1,p]\!]$. φ_k est nilpotent d'indice $m_k = \dim(F_k)$. D'après la question 12, il existe une base $\mathscr{B}_k$ de F_k dans laquelle la matrice de φ_k est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et donc la matrice de l'endomorphisme $f_k = \lambda_k Id_{F_k} + \varphi_k$ de F_k induit par f est $\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{C})$. La concaténation des bases $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ fournit une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ dans laquelle la matrice de f a la forme voulue.

18. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $\chi_f(f) = 0$ et en particulier, $\chi_f(f)(x_0) = 0$. Mais alors, tout multiple Q de χ_f est un polynôme tel que $Q(f)(x_0) = 0$.

Réciproquement, montrons que si $Q(f)(x_0) = 0$, alors Q est un multiple de χ_f. Soit donc Q un polynôme tel que $Q(f)(x_0) = 0$. Dans ce qui suit, la somme $m_1 + \ldots + m_{k-1}$ est par convention nulle quand $k = 1$. On a

$$Q(f)(x_0) = \sum_{k=1}^{p} Q(f)\left(u_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1}\right).$$

Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, F_k est stable par f puis par tout polynôme en f. Par suite, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $Q(f)\left(u_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1}\right) \in F_k$. Puisque les sous-espaces F_1, ..., F_p, sont supplémentaires, on en déduit que

$$Q(f)(x_0)\, 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ \sum_{k=1}^{p} Q(f)\left(u_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1}\right) = 0.$$

Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On sait que la formule de TAYLOR fournit le reste de la division euclidienne de Q par $(X - \lambda_k)^{m_k}$:

$$Q = \sum_{i=0}^{m_k-1} \frac{Q^{(i)}(\lambda_k)}{i!}(X-\lambda_k)^i + (X-\lambda_k)^{m_k} \times Q_1$$

où Q_1 est un polynôme et $R = \displaystyle\sum_{i=0}^{m_k-1} \frac{Q^{(i)}(\lambda_k)}{i!}(X-\lambda_k)^i$ est de degré strictement inférieur à m_k. En évaluant en $u_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{m_k-1} \frac{Q^{(i)}(\lambda_k)}{i!}(f-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^i \left(u_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m_k-1} \frac{Q^{(i)}(\lambda_k)}{i!} u_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1+i} \text{ (par définition de la base } \mathscr{B}).
\end{aligned}$$

Puisque la famille $\left(u_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1+i}\right)_{0 \leqslant i \leqslant m_k-1}$ est une base de F_k, on en déduit que $Q(\lambda_k) = Q'(\lambda_k) = \ldots = Q^{(m_k-1)}(\lambda_k) = 0$ et donc que λ_k est racine d'ordre au moins m_k de Q.

Ainsi, Q est divisible par chaque $(X-\lambda_k)^{m_k}$, $1 \leqslant k \leqslant p$. Ces polynômes étant deux à deux premiers entre eux, Q est divisible par $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k} = \chi_f$.

On a montré que l'ensemble des polynômes Q tels que $Q(f)(x_0) = 0$ est $\chi_f\mathbb{C}[X]$.

19. Il n'existe donc pas de polynôme Q non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que $Q(f)(x_0) = 0$. Ceci montre que la famille $\left(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est libre, de cardinal $n = \dim(E) < +\infty$ et donc que la famille $\left(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ base de E. On en déduit que f est cyclique.

III - Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

20. $0 \in C(f)$ et si $(g,h) \in (C(f))^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, alors

$$f \circ (\alpha g + \beta h) = \alpha f \circ g + \beta f \circ h = \alpha g \circ f + \beta h \circ f = (\alpha g + \beta h) \circ f$$

puis $\alpha g + \beta h \in C(f)$. Ainsi, C(f) est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(E), +, .)$. Ensuite, si $(g,h) \in (C(f))^2$,

$$f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h = g \circ f \circ h = g \circ h \circ f = (g \circ h) \circ f$$

puis $g \circ h \in C(f)$. Enfin, $\mathrm{Id}_E \in C(f)$ et finalement C(f) est un sous-algèbre de $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.

III.A - Commutant d'un endomorphisme cyclique

21. Puisque la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E, il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$.

22. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$g\left(f^i(x_0)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^{k+i}(x_0)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k\right)\left(f^i(x_0)\right).$$

Les deux endomorphismes g et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k$ coïncident sur une base de E et donc, $g=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k\in\mathbb{K}[f]$.

23. Supposons $g\in C(f)$. D'après les deux questions précédentes, il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $g=R(f)$. Inversement, si g est un polynôme en f, alors $g\in C(f)$. Donc, $C(f)=\mathbb{K}_{n-1}[f]$.

III.B - Décomposition de Frobenius

24. Si l'un des sous-espaces F_i, $1\leqslant i\leqslant r$, contient chacun des sous-espaces $F_1,\ldots,F_r$, alors $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{r}F_k=F_i$ est un sous-espace de E.

Montrons par récurrence que pour tout $r\in\mathbb{N}^*$, si $F_1,\ldots,F_r$, sont r sous-espaces de E tels que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{r}F_k$ soit un sous-espace de E, alors l'un de ces sous-espaces contient tous les autres.

- Le résultat est vrai quand $r=1$.
- Soit $r\geqslant 1$. Supposons le résultat pour r. Soient $F_1,\ldots,F_r,F_{r+1}$ $r+1$ sous-espaces de E tels que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{r+1}F_k$ soit un sous-espace de E. Posons $F=\displaystyle\bigcup_{k=1}^{r}F_k$

  Si F_{r+1} contient F, F_{r+1} contient chacun des autres sous-espaces et c'est fini. Si F contient F_{r+1}, alors $F=\displaystyle\bigcup_{k=1}^{r}F_k=\bigcup_{k=1}^{r+1}F_k$ est un sous-espace de E. Par hypothèse de récurrence, l'un des F_i, $1\leqslant i\leqslant r$, contient tous les autres.
  Montrons maintenant qu'il n'est pas possible que $F\not\subset F_{r+1}$ et $F_{r+1}\not\subset F$. Supposons le contraire par l'absurde. Donc, il existe un vecteur $x\in F_{r+1}$ qui n'est pas dans F et il existe un vecteur y de F qui n'est pas dans F_{r+1}.
  Pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $y-\lambda x$ est dans $F\cup F_{r+1}$ (car $F\cup F_{r+1}$ est un sous-espace de E). Si $y-\lambda x$ est dans F_{r+1}, alors $y=(y-\lambda x)+\lambda x$ est dans F_{r+1} ce qui n'est pas. Donc, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $y-\lambda x$ est dans F. Ainsi, pour chaque $\lambda\in\mathbb{K}$, il existe $i(\lambda)\in[\![1,r]\!]$ tel que $y-\lambda x\in F_{i(\lambda)}$.
  S'il existe $\lambda\neq\mu$ tel que $i(\lambda)=i(\mu)$, alors $x=\dfrac{1}{\mu-\lambda}\left((y-\lambda x)-(y-\mu x)\right)\in F_{i(\lambda)}\subset F$ ce qui n'est pas. Donc, pour $\lambda\neq\mu$, on a $i(\lambda)\neq i(\mu)$. Mais ceci est impossible car $\mathbb{K}$ est infini et l'ensemble des indices i est fini.

Le résultat est démontré par récurrence.

25. Soit $x\in E\setminus\{0\}$. Vérifions que $I_x=\{Q\in\mathbb{C}[X]/\ Q(f)(x)=0\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

- $0\in I_x$.
- Soit $(Q_1,Q_2)\in I^2$. $(Q_1-Q_2)(f)(x)=Q_1(f)(x)-Q_2(f)(x)=0$. Donc, $Q_1-Q_2\in I_x$.
- Soit $(P,Q)\in\mathbb{C}[X]\times I$. $(P\times Q)(f)(x)=P(f)\circ Q(f)(x)=P(f)(Q(f)(x))=P(f)(0)=0$ et donc $P\times Q\in I_x$.

Ceci montre que I_x est un idéal de $\mathbb{C}[X]$. De plus, $\pi_f(f)=0$ et en particulier, $\pi_f\in I_x$. Donc, I_x est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ non réduit à $\{0\}$. Puisque $(\mathbb{C}[X],+,\times)$ est anneau principal, on sait alors que I_x est constitué des multiples d'un certain polynôme unitaire $\pi_{f,x}$. De plus, $\pi_{f,x}$ est un diviseur unitaire de π_f.

Chaque $\mathrm{Ker}\,(\pi_{f,x}(f))$, $x\in E\setminus\{0\}$, contient x (et 0) et donc $\displaystyle\bigcup_{x\in E\setminus\{0\}}\mathrm{Ker}\,(\pi_{f,x}(f))=E$. Les diviseurs unitaires de π_f sont en nombre fini et donc E est la réunion d'un nombre fini de sous-espaces $\mathrm{Ker}\,(\pi_{f,x}(f))$. D'après la question précédente, E est l'un de ces sous-espaces et donc, il existe $x_1\in E$ tel que $E=\mathrm{Ker}\,(\pi_{f,x_1}(f))$. Ceci signifie que $\pi_{f,x_1}(f)=0$ et donc que π_{f,x_1} est un multiple de π_f. Puisque π_{f,x_1} est aussi un diviseur unitaire de π_f, on en déduit que $\pi_{f,x_1}=\pi_f$. Ainsi, $I_{x_1}=\pi_f\mathbb{K}[X]$.

On en déduit qu'il n'existe pas de polynôme non nul Q de degré inférieur ou égal à $d-1$ tel que $Q(f)(x_1)=0$. Ceci signifie que la famille $\left(x_1,f(x_1),\ldots,f^{d-1}(x_1)\right)$ est libre.

26. L'égalité $\pi_f(x_1)=\pi_{f,x_1}(f)(x_1)=0$ montre que $f^d(x_1)\in\mathrm{Vect}\left(x_1,f(x_1),\ldots,f^{d-1}(x_1)\right)$. Donc,

$$f(E_1)=\mathrm{Vect}\left(f(x_1),f^2(x_1),\ldots,f^{d-1}(x_1),f^d(x_1)\right)\subset\mathrm{Vect}\left(x_1,f(x_1),\ldots,f^{d-1}(x_1)\right)=E_1.$$

E_1 est stable par f. Ensuite, $E_1 = \text{Vect}\left(x_1, f(x_1), \ldots, f^{d-1}(x_1)\right) = \{P(f)(x_1),\ P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\} \subset \{P(f)(x_1),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$. Inversement, si $P \in \mathbb{K}[X]$, la division euclidienne de P par π_{f,x_1} fournit deux polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ tel que $P = Q\chi_{f,x_1} + R$. Mais alors $P(f)(x_1) = Q(f)(\pi_{f,x_1}(f)(x_1)) + R(f)(x_1) = R(x_1) \in E_1$. Finalement, $E_1 = \{P(f)(x_1),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

27. Par définition de E_1 et ψ_1, $\left(x_1, \psi_1(x_1), \ldots, \psi_1^{d-1}(x_1)\right)$ est une base de E_1 et donc ψ_1 est cyclique.

28. $F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \text{Ker}\left(\Phi \circ f^i\right)$ est un sous-espace de E. Soit $x \in F$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\Phi\left(f^i(f(x))\right) = \Phi\left(f^{i+1}(x)\right) = 0$ et donc $f(x) \in F$. Ainsi, F est stable par f.

Soit $x \in E_1 \cap F$. Posons $x = a_0x_1 + a_1f(x_1) + \ldots + a_{d-1}f^{d-1}(x_1) = a_0e_1 + a_1e_2 + \ldots + a_{d-1}e_d$. Les égalités $\Phi(x) = 0$, $\Phi(f(x)) = 0, \ldots, \Phi\left(f^{d-1}(x)\right) = 0$, fournissent successivement $a_{d-1} = 0$ puis $a_{d-2} = 0$ puis ... puis $a_0 = 0$ et donc $x = 0$. Donc, $E_1 \cap F = \{0\}$ ou encore, la somme $E_1 + F$ est directe.

29. $\psi \in \mathscr{L}\left(E, \mathbb{K}^d\right)$. Soit $x \in E_1 \cap \text{Ker}(\Phi)$. Comme à la question précédente, x s'écrit sous la forme $x = a_0x_1 + a_1f(x_1) + \ldots + a_{d-1}f^{d-1}(x_1)$ et les égalités $\Phi(x) = 0$, $\Phi(f(x)) = 0, \ldots, \Phi\left(f^{d-1}(x)\right) = 0$, fournissent successivement $a_{d-1} = 0$ puis $a_{d-2} = 0$ puis ... puis $a_0 = 0$ et donc $x = 0$. Donc $\text{Ker}\left(\Psi_{/E_1}\right) = \{0\}$.
De plus, $\dim(E_1) = d = \dim\left(\mathbb{K}^d\right) < +\infty$ et donc $\psi_{/E_1}$ est un isomorphisme de E_1 sur $\mathbb{K}^d$.

30. Vérifions que $F = \text{Ker}(\Psi)$. On a déjà $F \subset \text{Ker}(\Psi)$. Inversement, soit x un (éventuel) vecteur non nul de $\text{Ker}(\psi)$. $\pi_{f,x}$ est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $\deg(\pi_f) = d$. Pour $i \geqslant d$, la division euclidienne de X^i par $\chi_{f,x}$ fournit Q et R tels que $X^i = Q\pi_{f,x} + R$. Mais alors, $\Phi\left(f^i(x)\right) = \Phi(R(f)(x)) = 0$ par linéarité de Φ et donc $x \in F$.

Ainsi, $\text{Ker}(\Psi) = F$. D'autre part, $\mathbb{K}^d = \text{Im}\left(\Psi_{/E_1}\right) \subset \text{Im}(\Psi)$ puis $\text{Im}(\Psi) = \mathbb{K}^d$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(F) = \dim(\text{Ker}(\Psi)) = n - \dim(\text{Im}(\Psi)) = n - d.$$

En résumé, $E_1 \cap F = \{0\}$ et $\dim(E_1) + \dim(F) = \dim(E)$. On en déduit que $E = E_1 \oplus F$.

31. On a donc décomposé l'espace E en $E = E_1 \oplus F$ où E_1 est stable par f, de dimension $d = \deg(\pi_f) \in \mathbb{N}^*$ et ψ_1 l'endomorphisme de E_1 induit par f est cyclique et F est stable par f. De plus, le polynôme minimal de ψ_1 est π_f. On note aussi que si on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, π_{f_F} est un diviseur de $\pi_f = P_1$.

Si $F \neq \{0\}$, on recommence avec F : $F = E_2 \oplus F_2$ puis $E = E_1 \oplus E_2 \oplus F_2$ où E_2 est un sous-espace non nul stable par f, l'endomorphisme ψ_2 de E_2 induit par f est cyclique, et F_2 est stable par f. De plus, le polynôme minimal P_2 de ψ_2 est π_{f_F} qui est un diviseur de P_1 ... Puisque E est de dimension finie, ce processus s'arrête en un temps fini et fournit la décomposition demandée par l'énoncé.

III.C - Commutant d'un endomorphisme quelconque

32. Avec les notations des questions précédentes, pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, $C(\psi_i) = \mathbb{K}_{d_i-1}[\psi_i]$ où $d_i = \dim(E_i)$. De plus, la famille $\left(\text{Id}_{E_i}, \psi_i, \ldots, \psi_i^{d_i-1}\right)$ est libre (en évaluant en x_i une combinaison linéaire nulle de Id_{E_i}, $\psi_i, \ldots, \psi_i^{d_i-1}$). Donc, pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, $\dim(C(\psi_i)) = d_i$.

Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Si g laisse stable chaque E_i et si pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme g_i de E_i induit par g commute avec ψ_i, alors $g \in C(f)$. Ainsi, $C(f)$ contient un sous-espace isomorphe à $\prod_{i=1}^{r} C(\psi_i)$. Donc,

$$\dim(C(f)) \geqslant \dim\left(\prod_{i=1}^{r} C(\psi_i)\right) = \sum_{i=1}^{r} d_i = n.$$

33. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $C(f) = \mathbb{K}[f]$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La division euclidienne de P par χ_f fournit $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $P = Q\chi_f + R$ et $\det(R) < n$. En évaluant en f, on obtient $P(f) = R(f)$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ceci montre que $C(f) = \mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{n-1}[f] = \text{Vect}\left(\text{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$.

D'après la question précédente, $C(f)$ est de dimension supérieure ou égale à n et donc égale à n. Par suite, $\left(\text{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une famille génératrice de $C(f)$ de cardinal $n = \dim(C(f)) < +\infty$. On en déduit que $\left(\text{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une base de $C(f)$ et en particulier que $\left(\text{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une famille libre. D'après la question 19, f est cyclique.

Partie IV - Endomorphismes orthocycliques

IV.A - Isométries vectorielles orthocycliques

34. Soit $f \in O(E)$. On sait qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle laquelle la matrice de f est une matrice Δ, diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de format 1 du type (1) ou (-1) ou de format 2 du type $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$. Le polynôme caractéristique de f s'écrit alors

$$\chi_f = (X-1)^\alpha (X+1)^\beta \prod_{i=1}^{k}\left(X^2 - 2X\cos(\theta_i) + 1\right),$$

où chaque trinôme $X^2 - 2X\cos(\theta_i) + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. Si maintenant, f' est un automorphisme orthogonal ayant le même polynôme caractéristique que f, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ dans laquelle la matrice A' de f' est du même type que A. Le nombre de coefficients diagonaux égaux à 1 est α et le nombre de coefficients diagonaux égaux à -1 est β. Il y a aussi un même nombre de blocs du type $R(\theta'_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, où pour chaque i, $\theta'_i = \pm\theta_i$. Il reste à vérifier que l'on peut choisir $\mathscr{B}'$ de sorte que, pour chaque i, $\theta'_i = \theta_i$.

Soit (u, v) une base orthonormée d'un espace euclidien de dimension 2 dans laquelle la matrice d'un certain automorphisme orthogonal g est $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Alors, $(u, -v)$ est une base orthonormée dans laquelle la matrice de g est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta)$. Donc, quite à remplacer certains des vecteurs e'_i de la base $\mathscr{B}'$ par $-e'_i$, on a obtenu une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est A.

35. Soit $f \in O(E)$. Si f est orthocyclique, il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, C_Q est une matrice orthogonale et donc la dernière colonne de C_Q doit être orthogonale aux $n-1$ premières et unitaire. Donc, $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ et $a_0^2 = 1$. Par suite, C_Q est l'une des deux matrices $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après la question 3, $\chi_f = \chi_{C_Q} = X^n \pm 1$.

Réciproquement, supposons que $\chi_f = X^n \pm 1$. Soient $\mathscr{B}'$ une base orthonormale fixée de E puis f' l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}'$. Puisque la matrice de f' dans une base orthonormale est une matrice orthogonale, $f' \in O(E)$. Ainsi, f et f' sont deux automorphismes orthogonaux ayant le même polynôme caractéristique. D'après la question précédente, il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ telle $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$ où de plus A est une matrice compagnon. Donc, f est orthocyclique.

On a montré que pour tout $f \in O(E)$, f est orthocyclique si et seulement si $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$.

IV.B - Endomorphismes nilpotents orthocycliques

36. Soit f un endomorphisme nilpotent. Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f = X^n$. χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc f est triangulable. Il existe une base $\mathscr{B}_0 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dans laquelle la matrice A de f est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux tous nuls. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $(e_n, \ldots, e_1)$ soit l'orthonormalisée de la base $(u_1, \ldots, u_n)$. $\mathscr{B}$ est une base orthonormale et $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}}$ est triangulaire inférieure. Mais alors, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire inférieure en tant que produit de trois matrices triangulaires inférieures.

37. Supposons f orthocyclique et nilpotent. Il existe une base orthonormale $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice de f est C_Q (définie à la question 3). Les égalités $X^n = \chi_f = \chi_{C_Q} = Q$ montre que la dernière colonne de C_Q est nulle. Ceci montre qu'il existe base orthonormale $\mathscr{B}_0$ dans laquelle la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang $n-1$ car sa dernière colonne est nulle et la matrice extraite de format $n-1$ constituée des $n-1$ dernières lignes et $n-1$ premières colonnes est inversible. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_n)$ et donc $(\mathrm{Ker}(f))^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$.

Soient $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i$ deux éléments de $(\mathrm{Ker}(f))^\perp$. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormale.

$$(f(x)|f(y)) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i e_{i+1}\right) \mid \left(\sum_{j=1}^{n-1} y_j e_{j+1}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i = x|y.$$

Supposons que f est nilpotent, de rang $n-1$ et que $\forall(x,y) \in \left((\mathrm{Ker}(f))^{\perp}\right)^2$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$. Il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ à coefficients diagonaux tous nuls. Puisque T est de rang $n-1$, les coefficients $t_{i+1,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, sont nécessairement tous non nuls. $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1 et donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_n)$ puis $(\mathrm{Ker}(f))^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_{n-1})$. Soit $T' = \left(t'_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$ où pour tout $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$, $t'_{i,j} = t_{i+1,j}$. La condition imposée à f montre que les colonnes de T' sont unitaires et deux à deux orthogonales ou encore T' est une matrice orthogonale. Par récurrence descendante, les coefficients diagonaux de T' sont de carrés égaux à 1 et les coefficients non diagonaux sont nuls. Ainsi, T est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \pm 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, en remplaçant éventuellement e_2 par $-e_2$, puis éventuellement e_3 par $-e_3$, ..., puis éventuellement e_n par $-e_n$, on obtient une base orthonormale dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais alors, f est orthocyclique.

