SESSION 2006

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE 1

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \text{ (somme télescopique).}$$

On en déduit la convergence et la somme de la série proposée :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.}$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{(k-1)!} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!},$$

et donc,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2e^2.}$$

EXERCICE 2

a. f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.
Puisque f est paire, pour tout entier naturel non nul n, on a $b_n(f) = 0$ et pour tout entier naturel n, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\, dt.$$

Ainsi, $a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\, dt = \frac{2\pi^2}{3}$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\, dt\right) = -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\, dt \\ &= -\frac{4}{n\pi}\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\, dt\right) = \frac{4}{n^2\pi}.\pi(-1)^n = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, la fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout réel x de $[0, \pi]$,

$$f(x) = x^2 = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

b. $x = 0$ fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12},$$

et $x = \pi$ fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Mais alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}) = \frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}) = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

c. Puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la formule de Parseval fournit

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t)\, dt,$$

ou encore

$$\frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^4\, dt = \frac{2\pi^4}{5},$$

et donc,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

PROBLEME : Une introduction aux fonctions tests

I. Découverte des fonctions tests.

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

• Si $\overline{A}$ est compacte, alors, $\overline{A}$ est en particulier bornée. Puisque $A \subset \overline{A}$, A est aussi bornée.

• Réciproquement, si A est bornée, il existe $R > 0$ tel que $A \subset [-R, R]$. Mais alors $\overline{A} \subset \overline{[-R, R]} = [-R, R]$. On en déduit que $\overline{A}$ est bornée. Comme d'autre part, $\overline{A}$ est fermée, le théorème de Borel-Lebesgue permet d'affirmer que $\overline{A}$ est compacte.

Finalement,

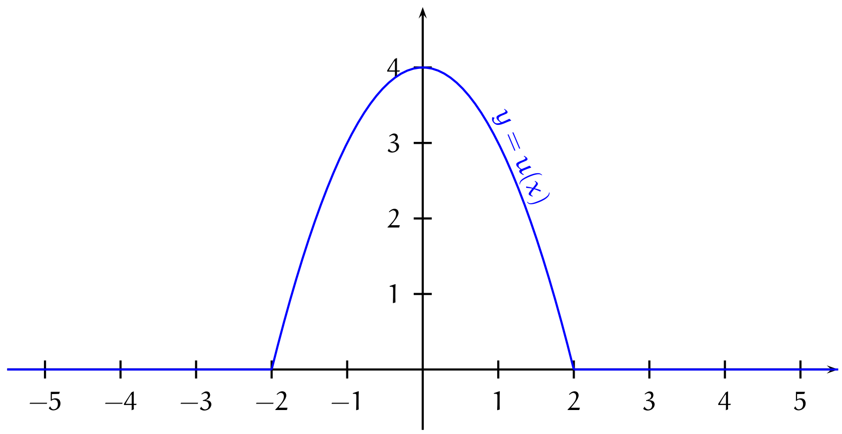
$$\boxed{\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ (A \text{ bornée} \Leftrightarrow \overline{A} \text{ compacte}).}$$

2. *Quelques exemples*

a. (Voir graphique page suivante)

$\{x \in \mathbb{R}/\ u(x) \neq 0\} =]-2, 2[$ et donc $\text{supp}(u) = [-2, 2]$. Puisque $]-2, 2[$ est borné, la question précédente permet d'affirmer que $\text{supp}(u) = \overline{]-2, 2[}$ est compact.

La fonction u n'est dérivable en 2 ($u'_g(2) = -4$ et $u'_d(2) = 0$). u n'est donc pas une fonction test.



b. $\{x \in \mathbb{R} / \ \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et donc $\text{supp}(\sin) = \mathbb{R}$. La fonction sin n'est pas à support compact et n'est donc pas une fonction test.

3. a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme P_k de degré $d_k = 2k$ tel que pour tout réel strictement positif x, $h^{(k)}(x) = P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$.

• Le résultat est clair pour $k = 0$ avec $P_0 = 1$ qui est bien un polynôme de degré $d_0 = 0 = 2 \times 0$.

• Soit $k \geq 0$. Supposons le résultat établi pour l'entier k. Pour tout réel strictement positif x on a alors

$$h^{(k+1)}(x) = (h^{(k)})'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P'_k\left(\frac{1}{x}\right) + P_k\left(\frac{1}{x}\right).\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)e^{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}\left(P'_k\left(\frac{1}{x}\right) + P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x}} = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}},$$

avec $P_{k+1} = -X^2(P_k + P'_k)$. Tout d'abord, P_{k+1} est bien un polynôme. Ensuite, puisque P_k n'est pas le polynôme nul, le degré de $P_k + P'_k$ est le degré d_k de P_k.Mais alors $d_{k+1} = 2 + d_k = 2k + 2 = 2(k+1)$.

On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{R}[X]/;\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(k)}(x) = P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. De plus, $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg(P_k) = 2k$.

Un théorème classique d'analyse dit que si f est une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $]a, b]$ telle que pour tout entier naturel non nul k $f^{(k)}$ a une limite réelle en a, alors f est de classe C^∞ sur $[a, b]$. Ici,

- h est continue sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = h(0)$. Donc h est continue sur $[0, +\infty[$.
- h est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout entier naturel non nul k et tout réel strictement positif x, on a $h^{(k)}(x) = P_k\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ où P_k est un

polynôme.Les théorèmes de croissances comparées permettent alors d'affirmer que pour tout entier naturel non nul k, $h^{(k)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et en particulier $h^{(k)}$ a une limite réelle quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

On en déduit que h est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et en particulier admet en 0 des dérivées à droite à tout ordre égales à 0. Comme h est également de classe C^∞ sur $]-\infty, 0]$ et que ses dérivées successives sur cet intervalle sont nulles, on a montré que

$$\boxed{h \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

b. Le support de h est $[0, +\infty[$. Donc h n'est pas une fonction test.
Supposons par l'absurde que h est développable en série entière. Alors, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout réel $x \in]-r, r[$,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0.$$

h est donc nulle sur un intervalle ouvert non vide de centre 0, ce qui n'est pas. Donc h n'est pas développable en série entière.

4. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. $-(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1,1[$. Donc si $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, $\varphi(x) = 0$ et si $x \in]-1,1[$

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{-(x-1)(x+1)}} = e^{\frac{1}{x^2-1}}.$$

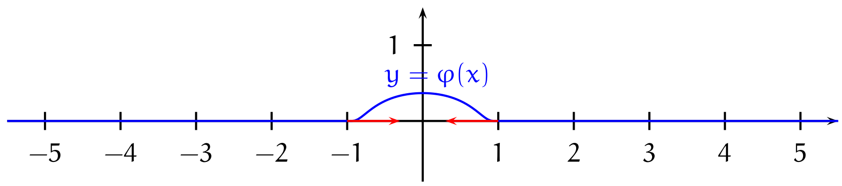
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \left\{\begin{array}{l} e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ si } x \in]-1,1[\\ 0 \text{ si } x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\end{array}\right.}$$

Puisque la fonction $x \mapsto -(x-1)(x+1)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Puisque de plus le support de φ est $[-1,1]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est une fonction test.}}$$

φ est paire, croissante sur $]-\infty,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$.

Graphe de la fonction φ



b. La fonction $x \mapsto h(-(x-3)(x-8))$ est une fonction test dont le support est $[3,8]$.
La fonction $x \mapsto h(-(x-1)(x-2)) + h(-(x-5)(x-6))$ est une fonction test dont le support est $[1,2] \cup [5,6]$.

5. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à support compact. Il existe un réel poisitif A tel que pour $x \in]-\infty,-A] \cup [A,+\infty[$, $f(x) = 0$. Mais alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6. *Construction d'une suite régularisante*
a. φ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ et donc localement intégrable sur $]-\infty,+\infty[$. φ est nulle au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ et donc φ est intégrable au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$. Finalement,

$$\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur }]-\infty,+\infty[.}$$

φ est une fonction continue, positive et non nulle sur $]-\infty,+\infty[$ et donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ dx > 0.}$$

Posons alors $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ dx$ puis $\rho = \dfrac{1}{I}\varphi$. ρ vérifie toutes les conditions de l'énoncé.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\rho_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow n\rho(nx) \neq 0 \Leftrightarrow nx \in]-1,1[\Leftrightarrow x \in]-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}[$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{supp}(\rho_n) = \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right].}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = nx$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\ dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho(nx)\ n dx = \int_{-1}^{1} \rho(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\ dt = 1.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\ dx = 1.}$$

II. Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions de classe C^∞ ou par des fonctions tests.

7. a. La suite de polynômes (P_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une certaine fonction f. On en déduit qu'il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$, $\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$. Pour $n \geq N$, on a alors

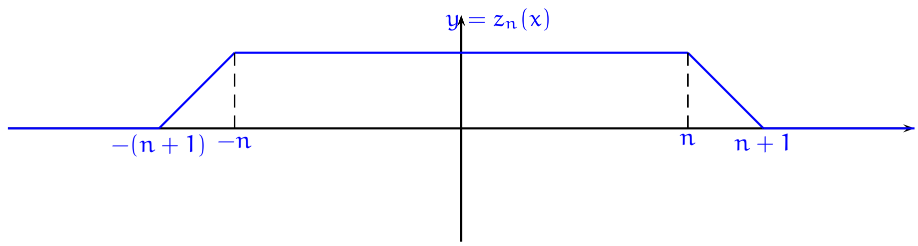
$$\|P_n - P_N\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_N\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b. Ainsi, pour $n \geq N$, le **polynôme** $P_n - P_N$ est borné sur $\mathbb{R}$ et donc est un polynôme constant C_n. La suite de polynômes constants $(C_n) = (P_n - P_N)$ converge vers $f - P_N$ qui est donc un polynôme constant C (car si pour tout x réel et tout $n \geq N$, $C_n(x) = C_n(0)$ alors en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient pour tout réel x, $C(x) = C(0)$).

Quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $P_n = P_N + C_n$, on obtient $f = P_N + C$ et f est donc un polynôme.

Si une suite de polynômes (P_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, f est un polynôme.

8. a. Graphe de la fonction z_n.



Soient x un réel positif puis $n_0 = E(x) + 1$. Pour $n \geq n_0$, on a $n \geq E(x) + 1 > x$ et donc $z_n(x) = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n(x) = 1$. Si maintenant x est un réel négatif, $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} z_n(-x) = 1$.

La suite de fonctions (z_n) converge simplement vers la fonction constante $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, pour tout entier n, $\|z_n - 1\|_\infty = 1$ et on n'a donc pas $\lim\limits_{n \to +\infty} \|z_n - 1\|_\infty = 0$.

La suite de fonctions (z_n) ne converge pas uniformément vers sa limite sur $\mathbb{R}$.

b. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'infini. Il existe un réel positif A tel que si $|x| > A$, $|g(x)| \leq 1$. Mais la fonction g est continue sur le segment $[-A, A]$ et donc bornée sur ce segment. Par suite, il existe un réel M tel que si $|x| \leq A$, $|g(x)| \leq M$.

Pour tout réel x on a alors $|g(x)| \leq \text{Max}\{1, M\}$. On a montré que

si g est nulle à l'infini, g est bornée sur $\mathbb{R}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\{x \in \mathbb{R}/\ |x| \geq n+1\} \subset \{x \in \mathbb{R}/\ |x| \geq n\}$, on a $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.

La suite (α_n) est décroissante.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque g est nulle à l'infini, il existe $A > 0$ tel que si $|x| > A$, $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit alors $n_0 = E(A) + 1$. Pour tout réel x tel que $|x| \geq n_0$, on a $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $\alpha_{n_0} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Mais alors, puisque la suite (α_n) est décroissante (et positive), pour $n \geq n_0$, on a $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_{n_0} < \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \alpha_n < \varepsilon)$$

et donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.}$$

d. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Si $|x| < n$, $|g_n(x) - g(x)| = |g(x) - g(x)| = 0 \leq \alpha_n$.
- Si $|x| \geq n+1$, $|g_n(x) - g(x)| = |g(x)| \leq \alpha_n$.
- Si $n \leq |x| < n+1$, $|g_n(x) - g(x)| = |(-|x| + n + 1)g(x) - g(x)| = (|x| - n).|g(x)| \leq |g(x)| \leq \alpha_n$.

Finalement, pour tout réel x on a $|g_n(x) - g(x)| \leq \alpha_n$ et donc $\|g_n - g\|_\infty \leq \alpha_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|g_n - g\|_\infty \leq \alpha_n.}$$

e. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le support de g_n est contenu dans $\text{supp}(z_n) = [-(n+1), (n+1)]$. Mais alors le support de g_n est borné est donc compact. De plus, g_n est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctons continues sur $\mathbb{R}$. Finalement

pour tout entier naturel n, g_n est continue sur $\mathbb{R}$ à support compact.

D'après les questions c. et d., la suite $(\|g_n - g\|_\infty)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g.

On a montré que

Une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact (A_1).

9. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h : t \mapsto g(t)f(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le support de h est contenu dans le support de g. On en déduit que h est nulle à l'infini et en particulier intégrable au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$. Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } t \mapsto g(t)f(x-t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour t réel donné, $-R \leq x - t \leq R \Leftrightarrow x - R \leq t \leq x + R$. La fonction $h : t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et son support est contenu dans $[x-R, x+R]$. On en déduit de nouveau que h est nulle à l'infini et en particulier intégrable au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$. Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } t \mapsto f(t)g(x-t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = x - t$, on obtient

$$\begin{aligned}
(g * f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)\ dt = \int_{-R}^{R} g(t)f(x-t)\ dt \\
&= \int_{x+R}^{x-R} g(x-u)f(u)\ (-du) = \int_{x-R}^{x+R} g(x-u)f(u)\ du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\ du \\
&= (f * g)(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f * g = g * f.}$$

10. *Support d'une convolution*

a. Soient x un réel strictement plus grand que $R + S$ et t un réel.
- Si $|t| > R$, on a $g(t) = 0$ et donc $g(t)f(x-t) = 0$.
- Si $|t| \leq R$, alors $-R \leq t \leq R$ puis $x - R \leq x - t$. Mais alors $x - t > (R+S) - R = S$. On en déduit que $f(x-t) = 0$ et donc encore une fois que $g(t)f(x-t) = 0$.

Finalement, pour tout réel t on a $g(t)f(x-t) = 0$ et donc $g * f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t) = 0$.

De même, soient x un réel strictement plus petit que $-(R+S)$ et t un réel.

- Si $|t| > R$, on a $g(t) = 0$ et donc $g(t)f(x-t) = 0$.
- Si $|t| \leq R$, alors $-R \leq t \leq R$ puis $x - t \leq x + R < -(R+S) + R = -S$. On en déduit de nouveau que $f(x-t) = 0$ et donc que $g(t)f(x-t) = 0$.

Dans ce cas aussi $g * f(x) = 0$.

En résumé, $f * g$ est nulle en dehors de $[-(R+S), (R+S)]$ et donc

$$\boxed{f * g \text{ est à support compact.}}$$

b. On prend pour f la fonction constante $x \mapsto 1$ et pour g la fonction z_0. g est à support compact et f ne l'est pas. Pour tout réel x on a

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)\ dt = \int_{-1}^{1} z_0(t)\ dt = 1.$$

$f * g$ est la fonction constante $x \mapsto 1$ et n'est donc pas à support compact.

11. *Dérivation d'une convolution*

a. Soient a un réel strictement positif puis $x \in [-a, a]$.

Si t est un réel tel que $t > a + R$, alors $x - t < x - (a+R) \leq a - (a+R) = -R$ et donc $g(x-t) = 0$.

De même si $t < -a - R$, alors $x - t > x + a + R \geq -a + a + R = R$ et donc $g(x-t) = 0$.

Mais alors

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g(x-t)\ dt.$$

b. Soient a un réel strictement positif et $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} [-a,a] \times [-a-R, a+R] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(t)g(x-t)\ dt \end{array}$.

- Pour tout réel x de $[-a, a]$, la fonction $t \mapsto \Phi((x,t))$ est continue par morceaux sur $[-a-R, a+R]$.

- Puisque g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, Φ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $[-a,a] \times [-a-R, a+R]$. De plus pour $(x,t) \in [-a,a] \times [-a-R, a+R]$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}((x,t)) = f(t)g'(x-t).$$

- Pour tout réel x de $[-a, a]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}((x,t)$ est continue par morceaux sur $[-a-R, a+R]$ et pour tout réel t de $[-a-R, a+R]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}((x,t)$ est continue sur $[-a, a]$.

- D'après la question 5., une fonction à support compact est nulle à l'infini et d'après la question 8.b., une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'infini est bornée sur $\mathbb{R}$. Les fonctions g et g' sont donc bornées sur $\mathbb{R}$ (g' étant également continue sur $\mathbb{R}$ à support compact). D'autre part, f est continue sur le segment $[-a-R, a+R]$ et en particulier est bornée sur ce segment. On en déduit que les fonctions Φ et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ sont bornées sur $[-a,a] \times [-a-R, a+R]$. On note alors M_0 (resp. M_1) un majorant de la fonction $|\Phi|$ (resp. $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right|$) sur $[-a,a] \times [-a-R, a+R]$ puis on note $\varphi_0\ :\ t \longmapsto M_0$ et $\varphi_1\ :\ t \longmapsto M_1$.

Les fonctions φ_0 et φ_1 sont continues, positives et clairement intégrables sur $[-a-R, a+R]$ et pour $(x,t) \in [-a,a] \times [-a-R, a+R]$, on a

$$|\Phi((x,t))| \leq \varphi_0(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}((x,t))\right| \leq \varphi_1(t).$$

En résumé

- $\forall x \in [-a, a]$, la fonction $t \mapsto \Phi((x,t))$ est continue par morceaux sur $[-a-R, a+R]$ et intégrable sur $[-a-R, a+R]$.
- La fonction Φ admet sur $[-a,a] \times [-a-R, a+R]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ vérifiant
  - $\forall t \in [-a-R, a+R]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}((x,t))$ est continue sur $[-a, a]$,
  - $\forall x \in [-a, a]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}((x,t))$ est continue par morceaux sur $[-a-R, a+R]$,
  - il existe une fonction φ_1 continue par morceaux, positive et intégrable sur $[-a-R, a+R]$ telle que
  - $\forall (x,t) \in [-a,a] \times [-a-R, a+R]$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}((x,t))\right| \leq \varphi_1(t)$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), $f * g$ est de classe C^1 sur $[-a, a]$ et pour tout réel x de $[-a, a]$,

$$(f * g)'(x) = \int_{-a-R}^{a+R} \frac{\partial}{\partial x} (f(t)g(x-t)) \, dt = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g'(x-t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(x-t) \, dt = f * g'(x).$$

Comme ce dernier résutat est valable pour tout réel strictement positif a, on a montré que

$$\boxed{f * g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } (f * g)' = f * (g').}$$

Il est alors clair par récurrence que si g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $f * g$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier naturel k, $(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)})$.

12. *Application à l'approximation*

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la fonction ρ_n est positive et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) \, dt = 1$ et que $\text{supp}(\rho_n) = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. Soit alors x un réel.

$$\begin{aligned} |f * \rho_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(t) \, dt - f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) \, dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))\rho_n(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|\rho_n(t) \, dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)|\rho_n(t) \, dt. \end{aligned}$$

b. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$,

$$\exists \alpha > 0/, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soient $n_0 = E\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1$ puis n un entier supérieur ou égal à n_0 et x un réel. On a déjà $n_0 > \frac{1}{\alpha}$ et donc $\frac{1}{n_0} < \alpha$. Mais alors, pour tout réel t de l'intervalle $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, on a

$$|(x - t) - x| = |t| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \alpha.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |f * \rho_n(x) - f(x)| &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)|\rho_n(t) \, dt \\ &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varepsilon.\rho_n(t) \, dt = \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho_n(t) \, dt = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) \, dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq n_0 \Rightarrow |f * \rho_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

et donc que

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f * \rho_n) \text{ converge uniformément vers la fonction } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

D'autre part, chaque fonction ρ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc d'après le résultat admis par l'énoncé (et puisque f est continue sur $\mathbb{R}$), chaque fonction $f * \rho_n$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

c. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact. f est en particulier continue sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'infini et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$. D'après b., la suite $(f * \rho_n)$ est une suite de fonctions tests convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On a montré que

$$\boxed{\text{toute fonction continue sur } \mathbb{R} \text{ à support compact est limite uniforme sur } \mathbb{R} \text{ d'une suite de fonctions tests } \quad (A_2).}$$

III. Théorème de Withney.

13. Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. f est en particulier continue sur $\mathbb{R}$. Mais alors, puisque $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ et que le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, $Z(f)$ est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue sur $\mathbb{R}$ et donc $Z(f)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R},\ Z(f) \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.}$$

14. *Une première tentative de preuve... infructueuse*
Soit F une partie fermée et non vide de $\mathbb{R}$. Montrons que pour tout réel x, $d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

Soit donc x un réel.
• Si x est dans F, alors $0 \leq d_F(x) = \inf\limits_{y \in F} |y - x| \leq |x - x| = 0$ et donc $d_F(x) = 0$.

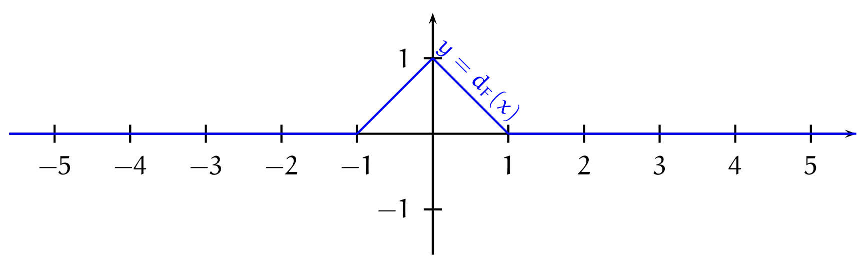
• Si $d_F(x) = 0$, il existe une suite (y_n) d'éléments de F telle que la suite $(|x - y_n|)$ converge vers $d_F(x)$ c'est-à-dire 0. Ceci signifie encore que la suite (y_n) converge vers x. Mais F est fermée et la limite d'une suite convergente d'éléments de F appartient à F. On en déduit que $x \in F$.

Finalement

$$\boxed{Z(d_F) = F.}$$

Le théorème de Whitney serait alors démontré si la fonction d_F était de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Représentons graphiquement la fonction d_F dans le cas particulier où $F =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, on a $d_F(x) = 0$. Si $x \in [-1, 0]$, $d_F(x) = d(x, -1) = x + 1$ et si $x \in [0, 1]$, $d_F(x) = d(x, 1) = 1 - x$. On obtient le graphique suivant :



La fonction d_F n'est pas dérivable en 0 et n'est donc pas de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (mais est tout de même continue sur $\mathbb{R}$). Cette fonction n'est pas solution du problème posé.

15. *Utilisation de fonctions tests*
(i) Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$.
Si a et b sont réels posons pour tout réel x $\varphi_{a,b}(x) = h(-(x-a)(x-b))$ (où h est la fonction étudiée à la question 3.).
Si $a = -\infty$ et b est réel, posons $\varphi_{a,b}(x) = h(-(x-b))$.
Si a est réel et $b = +\infty$, posons $\varphi_{a,b}(x) = h(x-a)$.
Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$, posons $\varphi_{a,b}(x) = e^x$.
Dans tous les cas, la fonction $\varphi_{a,b}$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des zéros est le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'intervalle $]a, b[$.

(ii) Soient a, b, c et d quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b \leq c < d$. La fonction $\varphi_{a,b} + \varphi_{c,d}$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des zéros est le complémentaire de $]a, b[\cup]c, d[$.

16. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$. Si F est vide, la fonction exponentielle est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des zéros est vide et donc égal à F. De même si $F = \mathbb{R}$, la fonction nulle est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des zéros est $\mathbb{R}$ et donc égal à F.

Sinon F n'est pas vide et son complémentaire Ω ne l'est pas davantage. Puisque F est fermé, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ et peut donc s'écrire comme une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints : $\Omega = \bigcup_{k\in I}]a_k, b_k[$, où I est une partie de $\mathbb{N}$.

Si I est fini, quite à renuméroter, on peut supposer que $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n}]a_k, b_k[$ et la fonction $\sum_{k=0}^{n} \varphi_{a_k,b_k}$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des zéros est le complémentaire de Ω.

Si I est infini, quite à renuméroter, on peut supposer que $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]a_k, b_k[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons pour alléger $\varphi_n = \varphi_{]a_n,b_n[}$.

La première idée qui consiste à choisir $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n$ ne fonctionne pas car il n'y a aucune raison que cette série de fonctions converge.

On peut améliorer en choisissant la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\varphi_n$ car, les fonctions $|\varphi_n|$ sont majorées par 1 de sorte que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$, mais cela n'assure pas encore la possibilité de dériver terme à terme indéfiniment. Il faut encore améliorer.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si l'intervalle $]a_n, b_n[$ est borné, on sait que la fonction φ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support compact. On en déduit que chaque $\varphi_n^{(k)}$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

Si $]a_n, b_n[=]-\infty, b_n[$. D'après la question 3., chaque $\varphi_n^{(k)}$ admet une limite réelle quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers b_n. Puisque φ_n est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $[b_n, +\infty[$, encore une fois, chaque $|\varphi_n^{(k)}|$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Il en est de même, si $]a_n, b_n[=]a_n, +\infty[$.

Dans tous les cas, pour tout entier k, $\|\varphi_n^{(k)}\|_\infty$ existe et est un réel strictement positif (car φ_n n'est pas un polynôme).

Pour n entier naturel donné, considérons alors λ_n un réel strictement positif tel que, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\|\lambda_n\varphi_n^{(k)}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$. On peut prendre par exemple

$$\lambda_n = \frac{1}{2^n \underset{0\leq k\leq n}{\text{Max}}\left(\|\varphi_n^{(k)}\|_\infty\right)}.$$

Pour $n \geq k$, on a $\|\lambda_n\varphi_n^{(k)}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$. Ceci montre que la série de fonctions $\left(\sum_{i=k}^{n} \lambda_i\varphi_i^{(k)}\right)_{n\geq k}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et donc (par récurrence sur k) que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\varphi_n$ est pour tout k, de classe C^k sur $\mathbb{R}$ avec $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\varphi_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\varphi_n^{(k)}$.

Enfin, puisque les λ_n sont strictement positifs et que les fonctions φ_n sont positives, on a pour tout réel x

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\varphi_n(x) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\varphi_n$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des zéros est F. Le théorème de WITHNEY est démontré.

