SESSION 2005

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

PREMIER EXERCICE

a.

$$\iint_T (x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{y=-x}^{y=1}(x+y)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=1}dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\left((x+\frac{1}{2})-(-x^2+\frac{x^2}{2})\right)dx = \int_{-1}^{1}(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2})\,dx = 2(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\iint_T (x+y)\,dxdy = \frac{4}{3}.}$$

b. Par symétrie,

$$\boxed{\iint_C |x+y|\,dxdy = 2\iint_T (x+y)\,dxdy = \frac{8}{3}.}$$

DEUXIEME EXERCICE

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \dfrac{-n}{x}$ est continue sur I (resp. J). Les solutions de (E_n) sur I (resp. J) constituent donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. La fonction $x \mapsto x^n$ est une solution particulière non nulle de (E_n) sur I (resp. J). Donc, les solutions de (E_n) sur I (resp. J) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^n$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Une éventuelle solution f de (E_1) sur $\mathbb{R}$ doit vérifier : $f_{/]0,+\infty[}$ est solution de (E_1) sur $]0,+\infty[$, $f_{/]-\infty,0[}$ est solution de (E_1) sur $]-\infty,0[$ et enfin $f(0) = 0$.

Par suite, il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que, pour tout réel x, $f(x) = \begin{cases} C_1 x \text{ si } x \geq 0 \\ C_2 x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Réciproquement, une telle fonction est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0 ce qui équivaut à $C_1 = C_2$ (graphiquement clair).

Les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx$, $C \in \mathbb{R}$. Elles constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

3. Soit $n \geq 2$. De même, si f est une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$, il existe nécessairement deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que, pour tout réel x, $f(x) = \begin{cases} C_1 x^n \text{ si } x \geq 0 \\ C_2 x^n \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Réciproquement, une telle fonction est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0, ce qui est le cas pour tout choix de C_1 et C_2 (graphiquement clair : $f'(0) = 0$).

Les solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \begin{cases} C_1 x^n \text{ si } x \geq 0 \\ C_2 x^n \text{ si } x < 0 \end{cases} = C_1 \begin{cases} x^n \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases} + C_2 \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ x^n \text{ si } x < 0 \end{cases} = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La famille (f_1, f_2) étant clairement libre, les solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

PROBLEME : Autour du théorème d'ABEL pour les séries entières

I. GENERALITES

1. a. Posons $a_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. La série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x).$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln(2)$ et la suite (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_2)$. D'autre part, la série de terme général a_n converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la suite a_n vérifie $(\mathcal{P}_1)$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = (-1)^n$. La série de terme général a_n diverge grossièrement et la suite (a_n) ne vérifie donc pas $(\mathcal{P}_1)$. La série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

La fonction f tend vers $\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et la suite (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_2)$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = 1$. (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ car la série de terme général a_n diverge grossièrement et ne vérifie pas $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = (-1)^n$ et pour $x \in]-1,1[$, $f_n(x) = a_n x^n = (-1)^n x^n$. Chaque fonction f_n a une limite ℓ_n quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, à savoir $\ell_n = (-1)^n$. Si la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $]-1,1[$, le théorème d'interversion des limites affirme alors que la série numérique de terme général ℓ_n converge, ce qui n'est pas. Donc, la série de fonctions de terme général f_n ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

2. Pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = a_n x^n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, $|f_n(x)| = |a_n|.|x|^n \leq |a_n|$. Par suite, pour tout entier naturel n, $\|f_n\|_\infty \leq |a_n|$. On en déduit que la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.

Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément sur $]-1,1[$. Puisque chaque fonction f_n a une limite réelle quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, à savoir a_n, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que f a une limite réelle quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to 1^-} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

3. Pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) x^n = x\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x \end{aligned}$$

Maintenant, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est absolument convergente car, quand n tend vers $+\infty$,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| = \frac{1}{n(n-1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après la question 2., on a alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x\to 1^-} (x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x) = 2\ln 2 - 1.$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1.}$$

II. THEOREME D'ABEL

4. a. Soient $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque pour tout naturel p, $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$, on a

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n+p} x^{n+p} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n(x).$$

b. Soient $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{N} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} &= x \sum_{p=1}^{N} r_{n+p-1} x^{n+p-1} - \sum_{p=1}^{N} r_{n+p} x^{n+p} = x \sum_{p=0}^{N-1} r_{n+p} x^{n+p} - \sum_{p=1}^{N} r_{n+p} x^{n+p} \\ &= r_n x^{n+1} + (x-1) \sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p} x^{n+p} - r_{n+N} x^{n+N} \\ &= r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p} x^{p-1} - r_{n+N} x^{n+N}.\end{aligned}$$

Tout d'abord, puisque la série de terme général a_n converge, la suite des restes (r_n) est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Puisque $x \in]0,1[$, il en est de même de la suite $(r_{n+N} x^{n+N})_{N \geq 1}$.

Mais alors, puisque pour $x \in]0,1[$, on a

$$\sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p} x^{p-1} = \frac{1}{x^{n+1}(x-1)} \left(\sum_{p=1}^{N} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} - r_n x^{n+1} + r_{n+N} x^{n+N} \right),$$

on en déduit que la suite $\left(\sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p} x^{p-1}\right)_{N \geq 1}$ converge ou encore que la série de terme général $r_{n+p} x^{p-1}$, $p \geq 1$, converge. Quand N tend vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1},$$

cette égalité restant claire pour $x = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0,1[, \ R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{\infty} r_{n+p} x^{p-1}.}$$

c. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite des restes (r_n) est définie et converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p, $|r_{n+p}| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soient alors $n \geq n_0$ et $x \in [0,1[$.

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &\leq |r_n| x^{n+1} + x^{n+1}(1-x) \sum_{p=1}^{+\infty} |r_{n+p}| x^{p-1} \leq \frac{\varepsilon}{2} x^{n+1} \Bigl(1 + (1-x) \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1}\Bigr) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} x^{n+1} \Bigl(1 + (1-x) \frac{1}{1-x}\Bigr) = 2 \frac{\varepsilon}{2} x^{n+1} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

De plus, $|R_n(1)| = |r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.

d. On a montré que : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0,1], \ (n \geq n_0 \Rightarrow |R_n(x)| \leq \varepsilon)$.

Ainsi, la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $[0,1]$ ou encore la série de fonctions de terme général $f_n \ : \ x \mapsto a_n x^n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Puisque chaque fonction f_n est continue sur $[0,1]$, f est continue sur $[0,1]$ et en particulier, a une limite réelle quand x tend vers 1 par valeurs inférieures égale à $f(1)$. On a montré que

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.}$$

5. D'après la question 4., si $\sum a_n$ converge, f a une limite réelle quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Donc, si f tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\sum a_n$ diverge.

6. On sait que pour tout réel x de $]-1,1[$,

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Comme la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées, le théorème d'Abel établi à la question 4. permet d'afiirmer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.}$$

7. a. Le terme général du produit de Cauchy des séries de termes généraux u_n et v_n est

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^{1/4}} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^{1/4}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^{1/4}}.$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$0 < k(n-k) = -k^2 + kn = -(k - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4} \leq \frac{n^2}{4},$$

et donc

$$|w_n| \geq (n-1) \frac{1}{(n^2/4)^{1/4}} = \sqrt{2} \frac{n-1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $\sqrt{2}\dfrac{n-1}{\sqrt{n}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $|w_n|$. En particulier, w_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général w_n diverge grossièrement. Il se peut donc que le produit de Cauchy de deux séries convergentes ne soit pas une série convergente (les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent en vertu du critère spécial aux séries alternées).

b. Puisque les séries de termes généraux u_n, v_n et w_n convergent, le rayon de convergence de chacune des séries entières correspondantes vaut au moins 1.

On sait que pour tout x de $]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n)$. Le théorème d'Abel permet alors d'écrire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \left(\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n)(\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

III. RECIPROQUE DU THEOREME D'ABEL

8. Considérons la suite $a_n = (-1)^n$. Pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi, la fonction f a une limite réelle quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, à savoir $\dfrac{1}{2}$. Pourtant, la série de terme général a_n diverge grossièrement. Ce qui précède signifie que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0,1[$, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = f(x)$. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \lim_{x \to 1^-} f(x).$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série de terme général a_n est majorée, et puisque la suite (a_n) est positive, on déduit que la série de terme général a_n converge.

IV. SERIES HARMONIQUES TRANSFORMEES

10. La suite $(\varepsilon_n.1^{n-1})$ est bornée (car $|\varepsilon_n.1^{n-1}| = 1$) et donc le rayon de la série entière correspondante vaut au moins 1. Mais la série de terme général $\varepsilon_n.1^{n-1}$ diverge grossièrement et donc le rayon vaut au plus 1. Finalement, le rayon de la série entière associée à la suite (ε_n) est égal à 1.

Puisque la suite $(\frac{\varepsilon_n}{n})$ est dominée par la suite (ε_n), le rayon correspondant vaut au moins 1. Mais la série de terme général $\frac{\varepsilon_n}{n}.1^{n-1}$ n'est pas absolument convergente et donc le rayon vaut au plus 1. La deuxième série entière admet également un rayon égal à 1.

11. Si $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge, le théorème d'Abel montre que f a une limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et si f a une limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, le théorème de Littlewood montre que $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

12. Soit $x \in]-1,1[$. Puisque la suite (ε_n) est p-périodique,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1} = \sum_{q=0}^{+\infty} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \ldots + \varepsilon_p x^{p-1}) x^{qp} \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \ldots + \varepsilon_p x^{p-1}) \sum_{q=0}^{+\infty} (x^p)^q = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \ldots + \varepsilon_p x^{p-1}}{1 - x^p}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{g \text{ est une fraction rationnelle et } \forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \ldots + \varepsilon_p x^{p-1}}{1 - x^p}.}$$

13. Dans le cas où $\varepsilon_n = 1$, on peut prendre $p = 1$ et pour $x \in]-1,1[$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Par suite, $f(x) = -\ln(1-x)$ et f n'a pas de limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. La question 11. montre alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Dans le cas où $\varepsilon_n = (-1)^n$, on peut prendre $p = 2$ et pour $x \in]-1,1[$, $g(x) = \frac{-1+x}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$. Par suite, $f(x) = -\ln(1+x)$ et $f(x)$ tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers 1. Le théorème de Littlewood montre que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

14. g est continue sur $[0,1[$ et de signe constant au voisinage de 1 à gauche. Donc, f a une limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures si et seulement si g est intégrable sur $[0,1[$. Mais alors, d'après la question 11., $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si g est intégrable sur $[0,1[$.

Or, quand x tend vers 1,

$$1 - x^p = (1-x)(1 + x + \ldots + x^{p-1}) \sim -p(x-1).$$

D'autre part, quand x tend vers 1,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \ldots + \varepsilon_p x^{p-1} = \left(\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i\right) + o(1).$$

Donc, si $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \neq 0$,

$$g \sim -\frac{\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i}{p} \frac{1}{x-1}$$

et g n'est pas intégrable au voisinage de 1. Dans ce cas, $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge.

Si $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i = 0$, g est le quotient d'un polynôme admettant 1 pour racine par d'un polynôme admettant 1 pour racine simple. Par suite, la fraction rationnelle g n'admet pas le nombre 1 pour pôle. g se prolonge donc par continuité en 1 et est donc intégrable sur $[0, 1[$. Dans ce cas, $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

Finalement,

$$\boxed{\sum \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ converge si et seulement si } \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i = 0.}$$

Si p est impair, on n'a jamais $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i = 0$ (car $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$) et donc $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge.

15. *Exemple.* Pour $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1 + x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5}{1 - x^6} = \frac{(1 + x + x^2)(1 - x^3)}{(1 - x^3)(1 + x^3)} = \frac{1 + x}{1 + x^3} + \frac{x^2}{1 + x^3} = \frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{x^2}{1 + x^3} \\ &= \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{x^2}{1 + x^3} \end{aligned}$$

Par suite,

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln(1 + t^3)\right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln(1 + x^3) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $f(x)$ tend vers $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{3}$. Par suite,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{3}.}$$

