Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Dans tout l'énoncé, p désigne un nombre entier strictement positif et $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on appelle *solution de l'équation de réplication de matrice A*, toute application $f : t \longmapsto \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)\big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, dont les composantes $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\boxed{\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_i'(t) = \langle e_i - f(t), Af(t) \rangle\, f_i(t)} \tag{1}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$ et $Af(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice-colonne dans la base canonique est la matrice-produit $A \times \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_p(t) \end{pmatrix}$.

L'objet du problème est d'étudier la trajectoire des solutions de (1) et en particulier leurs limites en $+\infty$.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I : solutions de l'équation de réplication scalaire

Dans le cas où p est égal à 1, les matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ ne possèdent qu'un seul coefficient et l'équation (1) se réduit à une équation différentielle scalaire, dont l'étude fait l'objet de cette partie.

Soit a un nombre réel différent de 0.

On se propose de montrer que, pour tout réel $y \in]0,1[$, il existe une unique fonction x définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$ vérifiant :

$$\begin{cases} x(0) = y \\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = a\big(x(t)\big)^2\big(1 - x(t)\big) \end{cases} \tag{2}$$

1. On note φ l'application définie sur $]0,1[$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = -\frac{1}{x} + \ln\Big(\frac{x}{1-x}\Big) \tag{3}$$

a) Justifier que φ est une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Donner l'allure du graphe de φ.

c) Les fonctions φ et φ^{-1} sont-elles lipschitziennes ?

2. a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et toute fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{f'(u)}{\big(f(u)\big)^2\big(1-f(u)\big)}\,\mathrm{d}u$ à l'aide des fonctions φ et f, de t et de $f(0)$.

b) Démontrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'unique fonction x définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$, qui vérifie (2) est la fonction f_y donnée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_y(t) = \varphi^{-1}\big(a\,t + \varphi(y)\big)\,.$$

3. On note $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme.

a) Démontrer que l'application Φ qui associe à tout élément y de $]0,1[$ la fonction f_y est une application continue de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel normé $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) On note $\mathscr{S} = \{f_y\,;\ y \in]0,1[\}$.
Justifier que $\mathscr{S}$ est une partie connexe par arcs de l'espace vectoriel normé $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\mathscr{S}$ est-elle une partie ouverte de $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$? En est-elle une partie fermée ?

Partie II : étude du cas où $p = 2$

Dans cette partie, on suppose que p est égal à 2 et on note $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Soit $x_0 \in]0,1[$.

On admet qu'il existe une unique application $f : t \longmapsto \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant (1) et telle que :

$$\begin{cases} f_1(0) = x_0 \\ f_2(0) = 1 - x_0 \end{cases} \tag{4}$$

1. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que g et sa dérivée g' admettent chacune une limite finie en $+\infty$.
   Démontrer que la limite de la dérivée g' en $+\infty$ est nécessairement nulle.
2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et H une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
   On considère une fonction $x : t \longmapsto x(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
   $$\forall\, t \in \mathbb{R},\ x'(t) = h(t)\, x(t)\,.$$
   a) Donner, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $x(t)$ en fonction de $x(0)$ et deux valeurs de la fonction H.
   b) Que peut-on en déduire sur le signe de la fonction x si $x(0)$ n'est pas nul ?
3. a) Justifier, pour tout réel t, l'égalité :
   $$f_1'(t) + f_2'(t) = \langle f(t), A f(t)\rangle \big(1 - f_1(t) - f_2(t)\big)\,.$$
   b) Justifier que $f_1(t) + f_2(t)$ est égal à 1 pour tout réel t.
4. On suppose dans cette question que c est égal à d.
   a) Utiliser les résultats de la partie I pour exprimer f_1 à l'aide de la fonction φ.
   b) En déduire la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ selon les valeurs de a et b.
5. On suppose dans cette question que a et d sont égaux et non nuls, et que b et c sont nuls, autrement dit
   $$A = a\, I_2 \quad \text{avec } a \neq 0\,.$$
   a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
   $$f_1'(t) = a\, f_1(t)\big(1 - f_1(t)\big)\big(2 f_1(t) - 1\big)\,.$$
   b) On suppose dans cette sous-question que x_0 est strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}\cdot$
      i) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{1}{2} < f_1(t) < 1\,.$
      ii) En déduire que $f_1(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$.
      iii) Trouver, selon le signe de a, la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
   c) Étudier la convergence de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ dans le cas où $x_0 < \dfrac{1}{2}\cdot$

Partie III : inégalités de Pinsker

1. On considère la fonction K définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :
   $$\forall\,(x,y) \in\,]0,1[\times]0,1[, \quad K(x,y) = x \ln\Big(\frac{x}{y}\Big) + (1-x)\ln\Big(\frac{1-x}{1-y}\Big) \tag{5}$$
   a) En utilisant la concavité de la fonction ln, démontrer que la fonction K est minorée. Est-elle majorée ?

b) Justifier que K est de classe C^1 sur $]0,1[\times]0,1[$ et calculer les dérivées partielles $\partial_1 K$ et $\partial_2 K$.

c) En déduire les points où la fonction K atteint sa borne inférieure.

d) Justifier l'inégalité :

$$x\ln\Big(\frac{x}{y}\Big)+(1-x)\ln\Big(\frac{1-x)}{1-y)}\Big)\geq 2(x-y)^2 \tag{6}$$

2. Pour toute partie D de $[\![1,p]\!]$ et tout vecteur $x=(x_1,x_2\dots,x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on note :

$$x_D=\begin{cases}\sum\limits_{i\in D}x_i & \text{si } D\neq\emptyset\\ 0 & \text{si } D=\emptyset\end{cases}$$

Soit $x=(x_1,x_2\dots,x_p)$ et $y=(y_1,y_2\dots,y_p)$ deux éléments de $\mathbb{R}_+^{*\,p}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^p x_i=\sum_{i=1}^p y_i=1\ .$$

On note $B_+=\{i\in[\![1,p]\!]\ /\ x_i>y_i\}$ et $B_-=\{i\in[\![1,p]\!]\ /\ x_i\leq y_i\}$.

a) Exprimer $\sum\limits_{i=1}^p|x_i-y_i|$ en fonction de x_{B_+} et y_{B_+}.

b) Justifier l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^p x_i\ln\Big(\frac{x_i}{y_i}\Big)\geq x_{B_+}\ \ln\Big(\frac{x_{B_+}}{y_{B_+}}\Big)+(1-x_{B_+})\ln\Big(\frac{1-x_{B_+}}{1-y_{B_+}}\Big)\ .$$

c) En déduire l'inégalité, dite de Pinsker, qui généralise l'inégalité (6) :

$$\sum_{i=1}^p x_i\ln\Big(\frac{x_i}{y_i}\Big)\geq\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^p|x_i-y_i|\Big)^2 \tag{7}$$

Partie IV : Convergence vers un point de coordonnées strictement positives

On note $\Delta=\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}_+{}^p\ /\ \sum\limits_{i=1}^p x_i=1\}$ et $\Delta^0=\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}_+^{*\,p}\ /\ \sum\limits_{i=1}^p x_i=1\}$.

Soit f une solution de l'équation de réplication (1) telle que $f(0)$ appartient à Δ^0, c'est-à-dire

$$\begin{cases}\forall\, i\in[\![1,p]\!],\ f_i(0)>0\\ f_1(0)+f_2(0)+\cdots+f_p(0)=1\end{cases}.$$

1. Justifier les deux assertions :

a) $\forall\, t\in\mathbb{R},\ \sum\limits_{i=1}^p f_i(t)=1$.

b) f est à valeurs dans Δ^0 .

On suppose désormais qu'il existe un vecteur $x^*=(x_1^*,x_2^*\dots,x_p^*)\in\Delta^0$ tel que :

$$\forall\, x\in\Delta\setminus\{x^*\},\quad \langle x^*-x,Ax\rangle>0 \tag{8}$$

2. On note Q la fonction définie sur définie sur l'ouvert $]0,1[^p$ de $\mathbb{R}^p$ par :

$$\forall\, x = (x_1, x_2 \dots, x_p) \in]0,1[^p, \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^* \ln\Big(\frac{x_i^*}{x_i}\Big) \tag{9}$$

a) Justifier que $Q(x)$ est positif ou nul pour tout $x \in \Delta^0$.
b) Justifier que x^* est l'unique élément x de Δ^0 tel que $Q(x) = 0$.
c) Pour tout $x \in \Delta^0$, justifier les inégalités :

$$Q(x) \leq \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^*}{x_i}\,(x_i^* - x_i) \leq \frac{1}{\min\{x_1, x_2, \dots, x_p\}}\, \Big(\sum_{i=1}^{p} (x_i - x_i^*)^2\Big)^{1/2}.$$

3. a) Justifier que la fonction composée $Q \circ f$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée à l'aide de f, A et x^*.
b) En déduire que $Q \circ f$ admet une limite positive ou nulle ℓ en $+\infty$.

4. On suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif ε tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ f_i(t) \geq \varepsilon \tag{10}$$

a) Justifier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (f_i(t) - x_i^*)^2 \geq \varepsilon^2 \ell^2$.
b) Justifier que, pour tout réel strictement positif α, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \Delta, \quad \Big(\langle x - x^*, x - x^*\rangle \geq \alpha\Big) \Longrightarrow \Big(\langle x^* - x, Ax\rangle \geq \beta\Big).$$

c) En déduire, en raisonnant par l'absurde, que la limite ℓ de $Q \circ f$ en $+\infty$ est nulle.
d) Démontrer que $f(t)$ tend vers x^* quand t tend vers $+\infty$.

5. Un exemple

Dans cette question, on suppose $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier l'existence d'un unique vecteur x^* vérifiant (8) et le trouver.
b) Démontrer que la fonction $t \longmapsto f_1(t) f_2(t) f_3(t)$ est croissante.
c) Justifier que $f(t)$ tend vers x^* quand t tend vers $+\infty$.