Calcul matriciel. Rappel et compléments

I. Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Une matrice à n lignes et p colonnes (n et p entiers naturels non nuls) est une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$ qui à un couple d'indices (i,j) associe un élément de $\mathbb{K}$ noté $a_{i,j}$. Une matrice de format (n,p) est aussi plus simplement un tableau à n lignes et p colonnes.

Addition. $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} + (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} = (a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$.
Multiplication par un scalaire. $\lambda\,(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} = (\lambda a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$.

Muni de ces deux lois, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np et en particulier $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2.

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont le coefficient ligne k, colonne l vaut 1 si $(k,l)=(i,j)$ et 0 sinon. Une écriture abrégée de son terme général est $\delta_{k,i}\times\delta_{l,j}$. La décomposition d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ dans la base canonique est $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}E_{i,j}$.

2) Produit de deux matrices.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit AB est la matrice de format (n,q) dont le terme général ligne i, colonne j (où $i\in[\![1,n]\!]$ et $j\in[\![1,q]\!]$) est

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

Dans le cas des matrices non carrées, ce produit n'est pas une loi interne.
Il est « associatif », non « commutatif » en général et « distributif sur l'addition ».

Théorème. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau, non commutatif pour $n\geqslant 2$.
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,.,\times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative pour $n\geqslant 2$.

L'ensemble des matrices inversibles pour $\times$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ (GL=groupe linéaire). $(GL_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe, non commutatif pour $n\geqslant 2$.

Dangers principaux.

- L'égalité $AB=AC$ n'entraine pas en général $B=C$ mais, si A est inversible, A est simplifiable.
- Pour des matrices carrées, l'identité $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$, plus généralement la formule du binôme de Newton $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k}$, et l'identité $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ et plus généralement $A^p-B^p = (A-B)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}A^{p-1-k}B^k$, sont vraies quand A et B commutent (et souvent fausses sinon).
- Si A et B commutent et sont carrées, $(AB)^p = A^pB^p$ (souvent faux sinon).
- L'égalité $AB=0$ n'entraine pas en général $A=0$ ou $B=0$.
- Si les formats sont adaptés aux deux produits, $AB=0 \not\Rightarrow BA=0$ (alors que $AB=I_n \Rightarrow BA=I_n$).
- La somme de 2 matrices inversibles n'est en général pas inversible ou encore $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable pour $+$.

Théorème. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) A est inversible
2) A est inversible à droite
3) A est inversible à gauche
4) $\det(A)\neq 0$
5) A est simplifiable à droite
6) A est simplifiable à gauche
7) A est simplifiable à gauche
8) $\text{rg}(A)=n$
9) $\text{Ker}A=\{0\}$ ($\text{Ker}A$ est l'ensemble des vecteurs colonnes X tels que $AX=0$)
10) $\text{Im}A=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ($\text{Im}A$ est l'ensemble des vecteurs colonnes de la forme AX où $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
11) Pour tout vecteur colonne B, le système $AX=B$, d'inconnue le vecteur colonne X, admet une unique solution. (X est alors fourni par les formules de Cramer).
12) A est la matrice d'une base dans une base.
13) A est la matrice d'un automorphisme dans une base.

Théorème (produit de deux matrices élémentaires).
Soient $E_{i,j}$ une matrice élémentaire de format (n,p) et $E_{k,l}$ une matrice élémentaire de format (p,q) alors

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}.$$

Démonstration. Le coefficient ligne u, colonne v, de ce produit vaut $\displaystyle\sum_{w=1}^{p} \delta_{u,i}\delta_{w,j}\delta_{w,k}\delta_{v,l} = \delta_{u,i}\delta_{v,l}\sum_{w=1}^{p}\delta_{w,j}\delta_{w,k} =$ $\delta_{u,i}\delta_{v,l}\delta_{j,k}$ (obtenu quand $w=j$) qui est le coefficient ligne u, colonne v de la matrice $\delta_{j,k}E_{i,l}$.

3) Transposition.
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de format (n,p). La transposée de A notée ${}^tA$ est la matrice de format (p,n) dont le coefficient ligne i, colonne j, est $a'_{i,j} = a_{j,i}$.

Théorème. ${}^t\left({}^tA\right) = A$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$ et ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
La transposition est un isomorphisme de l'espace vectoriel $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ sur l'espace vectoriel $(M_{p,n}(\mathbb{K}),+,.)$.

Les matrices carrées A telles que ${}^tA = A$ sont les matrices symétriques. Leur ensemble est noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.
$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \left(A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}\right)$.
Les matrices A telles que ${}^tA = -A$ sont les matrices antisymétriques. Leur ensemble est noté $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \left(A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = -a_{i,j}\right)$.

Théorème. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
$\dim\left(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})\right) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim\left(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})\right) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Démonstration. Soit t l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice associe sa transposée. $t - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ et $t + \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ sont des endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Donc, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}\left(t - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right)$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}\left(t + \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right)$ sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. t est un endomorphisme involutif de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et donc t est une symétrie. On sait alors que
$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}\left(t - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(t + \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.
(L'écriture d'une matrice carrée M associée à cette décomposition est alors : $M = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM) + \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$.)

II. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base donnée de E.
Soit $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une famille de p vecteurs de E.
La matrice de la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ dans la base $\mathscr{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$, est la matrice de format (n,p) dont le coefficient ligne i, colonne j, vaut la i-ème coordonnée de x_j dans $\mathscr{B}$ (la j-ème colonne « est » x_j).

III. Matrice d'une application linéaire

1) Définition

Soient E et F des espaces de dimensions respectives n et p et f un élément de $L(E,F)$.
Soient $\mathscr{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une base de E et $\mathscr{B}' = (e'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$. La matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}f$, est la matrice (de format (p,n)) de la famille $(f(e_j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Le coefficient ligne i, colonne j, de cette matrice est la i-ème coordonnée de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$. Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B})).$$

Deux bases de E et F respectivement étant fixées, l'application qui à f un élément de $L(E,F)$ associe sa matrice relativement à ces bases est un isomorphisme d'"espaces vectoriels de $L(E,F)$ vers $M_{p,n}(\mathbb{K})$ (une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice car entièrement déterminée par l'image d'une base) et en particulier,
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}f + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}g$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\lambda f) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

2) Ecriture matricielle d'une application linéaire

Avec les notations du 1), soit x un vecteur de E et $y = f(x)$.
Soit X le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.
Soit Y le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de y dans $\mathscr{B}'$.
Soit A la matrice de f relativement aux base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ alors

$$Y = AX.$$

Démonstration. $f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right) e'_i$ et donc, pour $i \in [\![1,p]\!]$,
$y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$ qui est bien le coefficient ligne i de AX.

Théorème. $\mathscr{B}$ est une base de E, $\mathscr{B}'$ est une base de E', $\mathscr{B}''$ est une base de E''.
- $\forall(f,g)\in\mathscr{L}(E,E')\times\mathscr{L}(E',E'')$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g\circ f)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(g)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.
- $\forall f\in\mathscr{L}(E)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n)=(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^n$.
- f isomorphisme de E sur E' si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\in GL_n(\mathbb{K})$ et dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)=(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))^{-1}$.

En particulier, si $f\in\mathscr{L}(E)$, $(f\in GL(E)\Leftrightarrow\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\in GL_n(\mathbb{K}))$ et dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)=(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^{-1}$.
- $\forall f\in GL(E)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n)=(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^n$.

IV. Changement de bases

1) Matrice de passage

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n.
La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, notée $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, est la matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$.
La j-ème colonne de $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ « est » le j-ème vecteur de $\mathscr{B}'$ exprimé dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème. $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}=I_n$, $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\times\mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}=\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$.
Toute matrice de passage est inversible et $\left(\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}=\mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$. Réciproquement, toute matrice inversible peut être interprétée comme une matrice de passage .

2) Changements de base

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soient x un vecteur de E puis X (resp. X') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ (resp. dans $\mathscr{B}'$). Alors

$$X=PX'.$$

(anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.)

Démonstration. $x=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x'_je'_j=\sum_{j=1}^{n}x'_j\left(\sum_{i=1}^{n}p_{i,j}e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}p_{i,j}x'_j\right)e_i$ puis, pour i élément de $[\![1,p]\!]$,

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}p_{i,j}x'_j,$$

qui est bien le coefficient ligne i de PX'.

3) Changements de base et applications linéaires

a) Cas général.

Données.
E un espace de dimension n muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
F un espace de dimension p muni de deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ et Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}'_1$.
f une application linéaire de E vers F.
A (resp. B) la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}_1$ (resp. $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}'_1$). Alors

$$B=Q^{-1}AP.$$

b) Cas particulier d'un endomorphisme .

Données.
E un espace de dimension n muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
f un endomorphisme de E.
A (resp. B) la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$). Alors

$$B=P^{-1}AP.$$

4) Matrices équivalentes , matrices semblables.

Définition. Soient A et B deux matrices rectangulaires (éventuellement carrées) de mêmes formats (n,p).
A et B sont équivalentes si et seulement si il existe P matrice carrée inversible de format n et Q matrice carrée inversible de format p telles que $B=QAP$.
Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles sont les matrices d'une même application linéaire relativement à deux couples de bases comme décrit en 3). Deux matrices équivalentes ont même rang.

Définition. Soient A et B deux matrices carrées de format n. A et B sont semblables si et seulement si il existe P matrice carrée inversible de format n telle que $B=P^{-1}AP$.
Deux matrices A et B sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme relativement à deux bases comme décrit en 3).

Deux matrices semblables sont équivalentes mais la réciproque est fausse en général ne serait-ce que parce que deux matrices équivalentes ne sont pas nécessairement carrées.
Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant, mêmes propriétés de calculs ...

V. Rang d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ une matrice de format (n, p).
Les lignes de A seront notées L_1, ... , L_n et les colonnes de A seront notées C_1, ... , C_p.

1) Définitions et premières propriétés.

Définition. Le rang de A est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes c'est-à-dire la dimension de l'espace engendré par la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple. (forme générale des matrices de rang 1)
Soit A une matrice de format (n, p) et de rang 1. Ses colonnes sont dans la droite engendrée par une certaine colonne non nulle $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Plus précisément, pour j élément de $[\![1, p]\!]$, C_j s'écrit $v_j U$ où les v_j sont des scalaires non tous nuls.
Si on pose $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, alors $A = U^tV = (u_i v_j)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ où U et V sont non nuls.
Réciproquement, une telle matrice est bien de rang 1.

Théorème. $\text{rg}A \leqslant \text{Min}\{n, p\}$.

Théorème. Soit $\mathscr{F}$ une famille de p vecteurs d'un espace E de dimension n telle que A soit la matrice de $\mathscr{F}$ dans une certaine base de E. Alors, $\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathscr{F})$.

Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.
Soit f une application linéaire de E vers F de matrice A relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$.

Théorème. Une matrice carrée de format n est inversible si et seulement si son rang est n.

Théorème. $\text{rg}(A + B) \leqslant \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$ et $\text{rg}(\lambda A) \leqslant \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(AB) \leqslant \text{Min}\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$.

Théorème. Soient A une matrice de format (n, p), P une matrice carrée inversible de format n et Q une matrice carrée inversible de format p. Alors, $\text{rg}(PA) = \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(AQ) = \text{rg}(A)$.
Démonstration. $\text{rg}(PA) \leqslant \text{rg}(A)$ puis $\text{rg}(A) = \text{rg}\left(P^{-1}PA\right) \leqslant \text{rg}(PA)$.

2) Opérations élémentaires.

Description des opérations élémentaires. On utilise les trois opérations élémentaires sur les colonnes ou sur les lignes suivantes :

1. Echange de deux colonnes (resp.de deux lignes). Codage : $C_i \leftrightarrow C_j$ (resp. $L_i \leftrightarrow L_j$)
2. Multiplication d'une colonne (resp.d'une ligne) par λ scalaire non nul. Codage : $C_j \leftarrow \lambda C_j$ (resp. $L_i \leftarrow \lambda L_i$).
3. Ajout de la colonne (resp.ligne) j à la colonne (resp.ligne) i avec $i \neq j$. Codage : $C_i \leftrightarrow C_i + C_j$ (resp. $L_i \leftarrow L_i + L_j$).

En combinant ces transformations élémentaires, on obtient des transformations plus sophistiquées :

4. Permutation des colonnes (resp. des lignes) d'une matrice
5. ajout à une colonne (resp. ligne) d'une combinaison linéaire des **autres** colonnes (resp. lignes)

3) Opérations élémentaires et rang.

Théorème. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang.

4) Interprétation matricielle des opérations élémentaires.

a) Produit d'une matrice par une matrice élémentaire.

On considère $A = (a_{i,j})$ une matrice rectangulaire de format (n, p).
Calculons le produit de A par une matrice élémentaire $E_{i,j}$ de format p à droite ou de format n à gauche.
Soient i et j deux éléments de $[\![1, p]\!]$ (non nécessairement distincts).

$$\begin{aligned} AE_{i,j} &= \left(\sum_{k,l} a_{k,l}E_{k,l}\right)E_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l}\delta_{i,l}E_{k,j} \\ &= \sum_{k} a_{k,i}E_{k,j} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$AE_{i,j}=\begin{array}{c}\text{i ème colonne de A}\\\text{en j ème colonne}\\\downarrow\\\left(\begin{array}{ccccccc}0&\dots&0&a_{1,i}&0&\dots&0\\0&\dots&0&a_{2,i}&0&\dots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\dots&0&a_{n,i}&0&\dots&0\end{array}\right)\end{array}$$

De même ,

$$\begin{aligned}E_{i,j}A&=E_{i,j}\left(\sum_{k,l}a_{k,l}E_{k,l}\right)=\sum_{k,l}a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l}=\sum_{k,l}a_{k,l}\delta_{j,k}E_{i,l}\\&=\sum_{l}a_{j,l}E_{i,l}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$E_{i,j}A=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccccccc}0&0&\dots&\dots&\dots&\dots&0\\\vdots&&&&&&\vdots\\0&0&\dots&\dots&\dots&\dots&0\\a_{j,1}&a_{j,2}&\dots&\dots&\dots&\dots&a_{j,n}\\0&0&\dots&\dots&\dots&\dots&0\\\vdots&&&&&&\vdots\\0&0&\dots&\dots&\dots&\dots&0\end{array}\right)&\begin{array}{l}\\\\\\\longleftarrow\ \text{j ème ligne de A en i ème ligne}\\\\\\\\\end{array}\end{array}$$

b) Multiplication d'une colonne (ou d'une ligne) par un scalaire λ non nul : $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

Soient i un élément de $[\![1,p]\!]$ (ou $[\![1,n]\!]$) puis λ un scalaire non nul.
Soit $\Lambda_i(\lambda)$ la matrice carrée de format p (resp. n) définie par :

$$\Lambda_i(\lambda)=I_p+(\lambda-1)E_{i,i}.$$

D'après le calcul préliminaire , il est clair que $A\Lambda_i(\lambda)$ se déduit de A par multiplication par λ de la colonne i et que $\Lambda_i(\lambda)A$ se déduit de A par multiplication de la ligne i par λ.

Théorème. Si $\lambda\neq 0$, $\Lambda_i(\lambda)$ est inversible .

c) Ajout d'une colonne à une autre colonne (d'une ligne à une autre ligne) : $C_i \leftarrow C_i + C_j$

Soient i et j deux éléments de de $[\![1,p]\!]$ (ou $[\![1,n]\!]$) distincts.
Soit $\Lambda_{i,j}=I_p+E_{j,i}$ (resp. $I_n+E_{i,j}$). D'après le calcul préliminaire , il est clair que $A\Lambda_{j,i}$ se déduit de A en ajoutant C_i à C_j et que $\Lambda_{i,j}A$ se déduit de A en ajoutant L_j à L_i.

Théorème. $\Lambda_{i,j}$ est inversible .

5) Méthode du Pivot de Gauss

Lemme du Pivot de Gauss. Soit A une matrice de format (n,p) dont la première ligne est non nulle.
A peut être transformée par opérations élémentaires sur les colonnes en une matrice A_1 de même format de la forme :

$$A'=\left(\begin{array}{cccc}1&0&\dots&0\\\times&&&\\\vdots&&A'_1&\\\times&&&\end{array}\right)$$

où $\text{rg}A=\text{rg}A'=1+\text{rg}(A'_1)$.

Le même travail est valable en ligne en supposant non nulle la première colonne.

Démonstration. Si $a_{1,1}=0$, il existe $j>1$ tel que $a_{1,j}$ soit non nul. On échange alors la colonne C_j et la colonne C_1 pour obtenir une matrice de même rang que A et dont le coefficient ligne 1, colonne 1, est non nul.

Puis par division de la première colonne de cette matrice par ce coefficient non nul, on obtient une matrice de même rang que A dont le coefficient ligne 1, colonne 1, est égal à 1.
Il reste enfin à remplacer chaque colonne C_j d'indice $j > 1$ et de premier coefficient $a'_{1,j}$ par $C_j - a'_{1,j}C_1$ pour parvenir à la forme voulue sans avoir modifié le rang de A.

Détermination du rang de A par la méthode du Pivot de Gauss. Si A est nulle , rg$A = 0$. Sinon, en commençant par amener en première ligne, une ligne non nulle, A a même rang qu'une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \times & & & \\ \vdots & & A'_1 & \\ \times & & & \end{pmatrix}$ c'est à dire $1 + \text{rg}A'_1$ (car la première colonne de A' et les $p-1$ dernières engendrent des sous espaces supplémentaires)

En réitérant ces transformations en ligne et en colonnes, A a même rang qu'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & \dots & 0 \\ \times & 1 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 & & \\ & & & \times & 0 & & \\ \vdots & & & \times & \vdots & & \vdots \\ \times & \dots & \dots & \times & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Le rang de A est le nombre de colonnes non nulles de cette dernière matrice .

6) Rang et matrices équivalentes

Théorème. Soit A une matrice de format (n, p) et de rang r non nul.
A est équivalente à la matrice J_r de format (n, p) définie par blocs :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice carrée unité de format r. Réciproquement, une matrice équivalente à J_r est de rang r.

Démonstration 1. Soit A une matrice de format (n, p) et de rang r non nul. On reprend le pivot de Gauss et en l'interprétant en terme de produit matriciel : en multipliant A à droite par un certain nombre de matrices inversibles dont le produit est noté V et à gauche par un certain nombre de matrices inversibles dont le produit est noté U, on obtient $UAV = J_r$ puis $A = U^{-1}J_rV^{-1}$.

Démonstration 2. Soit A une matrice de format (n, p) et de rang r non nul. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrice A relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.
Soit $\mathscr{B}_0 = (e_i)_{r+1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de Kerf si $r < p$ ($\dim(\text{Ker}f) = \dim(\mathbb{K}^p) - \text{rg}f = p - r$) ou $\mathscr{B}_0 = \varnothing$ si $r = p$. $\mathscr{B}_0$ est une famille libre de $\mathbb{K}^p$ que l'on peut compléter en $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ base de $\mathbb{K}^p$. La restriction de f à $\text{Vect}(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est injective de sorte que si on pose pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $e'_i = f(e_i)$, la famille $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$ que l'on peut compléter en une base $B' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$.
La matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est la matrice J_r ce qui montre que A est équivalente à J_r.

Réciproquement, $\text{rg}(PJ_rQ) = \text{rg}(J_r) = r$.

Théorème. $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$.

7) Rang et matrices extraites

Théorème. $\text{rg}(A)$ est le format maximal d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Théorème. $\text{rg}(A) \geqslant r \Leftrightarrow$ il existe une matrice carrée inversible de format r extraite de A.

Théorème. $\text{rg}A = r \Leftrightarrow$ il existe une matrice carrée inversible de format r extraite de A et toute matrice carrée extraite de A de format $> r$ est non inversible
$\text{rg}A = r \Leftrightarrow$ il existe une matrice carrée inversible de format r extraite de A et toute matrice carrée extraite de A de format $r+1$ est non inversible.

VI. Matrices de permutations

1) Définition.

Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. La matrice $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice (de permutation) associée à σ. Le coefficient ligne i, colonne j, de P_σ vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon.

Exemple. Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Propriétés.

Théorème. $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.

Démonstration. Le coefficient ligne i, colonne j, de $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$$

qui est bien le coefficient ligne i, colonne j, de $P_{\sigma\circ\sigma'}$.

Théorème. $\forall\sigma \in S_n$, $P_\sigma \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Théorème. Soit $G = \{P_\sigma,\ \sigma \in S_n\}$. $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ isomorphe à $(S_n, \circ)$.

Théorème. $\forall\sigma \in S_n$, $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ (signature).

Démonstration.

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma'\in S_n} \varepsilon(\sigma')p_{\sigma'(1),1}...p_{\sigma'(n),n} = \sum_{\sigma'\in S_n} \varepsilon(\sigma')\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)}...\delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma)$$

(car $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)}...\delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = 1 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(k) = \sigma'(k) \Leftrightarrow \sigma = \sigma'$ et sinon $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)}...\delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = 0$).

3) Produit d'une matrice par une matrice de permutation

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de format (p, n) et P_σ la matrice associée à σ permutation donnée de $[\![1, n]\!]$ (resp. $[\![1, n]\!]$).

Alors $AP_\sigma = \left(C_{\sigma(1)}, ..., C_{\sigma(n)}\right)$ et $P_\sigma A = \begin{pmatrix} L_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$.

Démonstration. Le coefficient ligne i, colonne j, de AP_σ vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)},$$

De même, le coefficient ligne i, colonne j, de $P_\sigma A$ vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}a_{k,j} = a_{\sigma^{-1}(i),j}.$$

VII. Trace d'une matrice carrée et trace d'un endomorphisme

1) Définition.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée. La trace de A est le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

2) Propriétés.

Théorème. La trace est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$:

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2,\ \mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda\mathrm{Tr}A + \mu\mathrm{Tr}B.$$

Théorème. $\forall(A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Démonstration. $\mathrm{Tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,j}\right) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Théorème. Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration. $\mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{Tr}\left(APP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}A$.

Danger. $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA) \neq \mathrm{Tr}(ACB)$ en général.

3) Trace d'un endomorphisme.

La trace d'un endomorphisme f d'un espace E de dimension n est la trace de sa matrice dans une base donnée de E (ne dépend pas du choix de la base puisque deux matrices semblables ont même trace).

VIII. Calculs par blocs

1) Combinaisons linéaires.

On découpe une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ de format (n, p) en blocs (ou cellules) $A_{i,j}$ de format (n_i, p_j) où $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$ et $n_1 + \ldots + n_s = n$, $p_1 + \ldots + p_t = p$.
Avec des notations évidentes, si $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t}$ alors $\lambda A + \mu B = (\lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t}$.

2) Multiplication.

Pour calculer par blocs le produit AB, le découpage de A en colonnes doit correspondre au découpage de B en lignes.
On découpe une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ de format (n, p) en $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s}$ où $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant t$ et $n_1 + \ldots + n_r = n$, $p_1 + \ldots + p_s = p$, et une matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q}$ de format (p, q) en $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t}$ où $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$ et $p_1 + \ldots + p_s = p$, $q_1 + \ldots + q_t = q$.

Si, pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant t$, on pose $C_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{s} A_{i,k} B_{k,j}$, alors $AB = (C_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant t}$.

L'étude de la comatrice sera rappelée dans le chapitre « déterminant » et les calculs de puissance de matrices ou d'inverses de matrices seront étudiés dans le chapitre « réduction des endomorphismes ».