Résumé de cours d'algèbre linéaire de Math Sup et compléments

I. Espaces vectoriels - Sous espaces vectoriels

1) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un ensemble non vide muni d'une l.d.c.i. notée $+$ et d'une l.d.c.e. de domaine $\mathbb{K}$ notée.
$(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\Leftrightarrow$ $(E, +)$ est un groupe abélien (c'est-à-dire que $+$ est commutative, associative, possède un élément neutre noté 0 et tout x de E possède un symétrique pour $+$ noté $-x$) et de plus, $+$ et $.$ vérifient quatre axiomes :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2,\ \textbf{(1)}\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y\ \textbf{(2)}\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x\ \textbf{(3)}\ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x\ \textbf{(4)}\ 1.x = x.$$

2) Structure de $\mathbb{K}$-algèbre.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel muni d'une autre l.d.c.i. notée $\times$.
$(E, +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$ algèbre $\Leftrightarrow$ $(E, +, \times)$ est un anneau (c'est-à-dire que $\times$ est associative, distributive sur $+$ et possède un élément neutre souvent noté 1 ou e ou I_n ou Id_E ...) et de plus $.$ et $\times$ vérifient l'axiome :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2,\ \lambda(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y).$$

L'algèbre est dite commutative quand $\times$ est commutative. La dimension de l'algèbre est la dimension de l'espace vectoriel $(E, +, .)$.

3) Exemples de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ou de $\mathbb{K}$-algèbres supposés connus.

(Dans les exemples qui suivent les opérations ne sont pas citées et sont toujours les opérations usuelles dans les ensembles considérés.)

a) $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

1. $(\mathbb{C}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2 (les nombres ou scalaires sont les réels et les vecteurs sont les complexes). $(\mathbb{C}, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension 1 (les nombres ou scalaires sont les complexes et les vecteurs sont les complexes).
2. $(\mathbb{K}^n, +, .)$ sur $\mathbb{K}$ (modèle de l'espace de dimension n sur $\mathbb{K}$, tout espace de dimension n sur $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$).
3. $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension infinie (suites à coefficients dans $\mathbb{K}$) (les vecteurs sont les suites).
4. $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension infinie (polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$).
5. $(\mathbb{K}(X), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension infinie (fractions rationnelles).
6. $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension infinie (applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et plus généralement $\left(F^A, +, .\right)$ où A est un ensemble quelconque et $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
7. $(\mathscr{L}(E, F), +, .)$ et donc en particulier $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \{$formes linéaires sur $E\}$.
8. $(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n, +, .)$ quand les $(E_i, +, .)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
9. $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ (les vecteurs sont les matrices).
10. $\left(C^k(I, \mathbb{K}), +, .\right)$ (les vecteurs sont les fonctions) et $(C^\infty(I, \mathbb{K}), +, .)$.

b) $\mathbb{K}$-algèbre

1. $(\mathbb{C}, +, ., \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
2. $(\mathscr{L}(E)+, ., \circ)$ (non commutative si $\dim E > 1$).
3. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ (non commutative si $n > 1$)
4. $\left(I^{\mathbb{K}}, +, ., \times\right)$ ou $C^k(I, \mathbb{K})$ ou $C^\infty(I, \mathbb{K})$
5. $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ et $(\mathbb{K}(X), +, ., \times)$

$(\mathbb{K}_n[X], +., \times)$ n'est pas une $\mathbb{K}$-algèbre car $\times$ n'est pas une loi interne dans $\mathbb{K}_n[X]$.

4) Sous espaces vectoriels

a) Définition et caractérisation

$$\begin{aligned}
F \text{ sev de } E &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} F \subset E \text{ et } F \text{ stable pour } + \text{ et } . \text{ et } F\ \mathbb{K}\text{-ev pour les lois induites}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \subset E \text{ et } 0_E \in F \text{ et } F \text{ stable pour } + \text{ et } .\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \subset E \text{ et } 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \subset E \text{ et } 0_E \in F \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda x + \mu y \in F
\end{aligned}$$

Un sous-espace vectoriel F est stable par combinaison linéaire : toute combinaison linéaire d'une famille de vecteurs de F est un vecteur de F.

b) Intersection et somme

Si F et G sev de E alors $F \cap G$ et $F + G$ sont des sev de E et plus généralement si F_1, F_2,..., F_p sont des sev alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$ et $F_1 + F_2 \ldots + F_p$ sont des sev.

Remarque. $F \cup G$ n'est pas un sev en général. $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$. $F \cup G$ sev $\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

c) Sous-algèbres

Soit $(E, +, ., \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre.

$$\begin{aligned}
A \text{ sous-algèbre de } E \ &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset E,\ A \neq \varnothing,\ A \text{ est stable pour } +,\ . \text{ et } \times \text{ et } A \text{ munie des lois induites est une } \mathbb{K}\text{-algèbre}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} A \subset E,\ 0 \in A \text{ et } A \text{ est stable pour } +,\ . \text{ et } \times\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} A \subset E,\ 0 \in A \text{ et } \forall (x, y) \in A^2,\ x + y \in A \text{ et } \forall (x, \lambda) \in A \times \mathbb{K},\ \lambda x \in A \text{ et } \forall (x, y) \in A^2,\ x \times y \in A\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} A \subset E,\ 0 \in A \text{ et } \forall (x, y) \in A^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in A \text{ et } \forall (x, y) \in A^2,\ x \times y \in A
\end{aligned}$$

5) Sommes directes. Sous espaces vectoriels supplémentaires

a) Cas de deux sous espaces

Soient F et G deux sev de E.

$$\begin{aligned}
\text{La somme } F + G \text{ est directe } &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{tout } x \text{ de } F + G \text{ s'écrit de manière unique sous la forme } x = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in F \text{ et } x_2 \in G\\
&\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{l'application } \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \text{ est injective}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} F \cap G = \{0\}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, $F + G$ se note $F \oplus G$. $F \oplus G$ est isomorphe à $F \times G$.

$$\begin{aligned}
F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires } &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{tout } x \text{ de } E \text{ s'écrit de manière unique sous la forme } x = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in F \text{ et } x_2 \in G\\
&\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{l'application } \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \text{ est bijective}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0\}.
\end{aligned}$$

L'existence d'un supplémentaire est démontrée en dimension finie mais ne peut pas être utilisée en dimension infinie. Un sous-espace admet le plus souvent une infinité de supplémentaires et on ne doit donc pas dire « le supplémentaire ... » mais on doit dire « un supplémentaire de F ».

Exemples. $\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$ (décomposition d'une fonction f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)))$).

$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$ (décomposition d'une matrice carrée M en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique : $M = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) + \dfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$).

b) Cas général d'un nombre fini de sous espaces

$$\begin{aligned}
\text{La somme } F_1 + \ldots F_p \text{ est directe } &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{tout } x \text{ de } F_1 + \ldots + F_p \text{ s'écrit de manière unique } x = x_1 + \ldots + x_p\\
&\quad\ \text{où } \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \in F_i\\
&\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{l'application } \varphi : \begin{array}{ccc} F_1 \times \ldots \times F_p & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & x_1 + \ldots + x_p \end{array} \text{ est injective}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} \forall i \in [\![1, p]\!],\ F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right) = \{0\}\\
&\underset{\text{th}}{\Leftrightarrow} \forall i \in [\![2, p]\!],\ F_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} F_j\right) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la somme $F_1 + \ldots + F_p$ s'écrit $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ ou $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. La somme directe $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ est isomorphe à $F_1 \times \ldots \times F_p$. Un isomorphisme de $F_1 \times \ldots \times F_p$ sur $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ est $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_1 + \ldots + x_p$.

Danger. Il est faux de croire que $\sum F_i$ est directe $\Leftrightarrow \forall i \neq j,\ F_i \cap F_j = \{0\}$ ($\Rightarrow$ vraie bien sûr).

Le cas de trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distinctes fournit un contre exemple usuel.

Def : Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$, sont supplémentaires si et seulement si tout x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + \dots + x_p$ où $x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p$ si et seulement si $E = F_1 + \dots + F_p$ et la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe. Dans ce cas, on écrit $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ ou $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

6) Projections et symétries.

Soient F et G deux sev supplémentaires de E. Soient p la projection sur F parallèlement à G, q la projection sur G parallèlement à F et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Soit $x = x_1 + x_2$ la décomposition d'un vecteur quelconque x de E associée à la décomposition $E = F \oplus G$. Alors par définition $p(x) = x_1$ et $s(x) = x_1 - x_2$.

a) • $\forall x \in E$, $p(x) = x_1$ et $q(x) = x_2$.
• $p \in \mathscr{L}(E)$, $p \circ p = p$, $p \circ q = q \circ p = 0$, $p + q = \mathrm{Id}_E$.
• $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \{\text{invariants par } p\}$ et $G = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.
• $p_{/\mathrm{Im}p} = \mathrm{Id}_{/\mathrm{Im}p}$ et $p_{/\mathrm{Ker}p} = 0_{/\mathrm{Ker}p}$.

Th : Réciproquement, si p est un endomorphisme vérifiant $p \circ p = p$ alors $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires puis p est la projection sur $\mathrm{Im}p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}p$.

b) • $\forall x \in E$, $s(x) = x_1 - x_2$
• $s \in GL(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}$
• $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \{\text{invariants par } s\}$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \{x / s(x) = -x\}$
• $s = 2p - \mathrm{Id} = \mathrm{Id} - 2q$ et $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s)$

Réciproquement si s est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}$ alors $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ sont supplémentaires puis s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

7) Combinaisons linéaires et sous-espace engendré par une famille ou une partie de E

a) Combinaisons linéaires

Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille non vide de scalaires. Cette famille est dite à support fini si et seulement si l'ensemble des indices i tels que λ_i est non nul est fini (éventuellement vide).

Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E et y un vecteur de E.
y est combinaison linéaires de la famille $(x_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \exists\, (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini telle que $y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$. Si $I = [\![1, p]\!]$, une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$
Soient X une partie de E et y un vecteur de E.
y est combinaison linéaire des vecteurs de $X \Leftrightarrow \exists (\lambda_x)_{x \in X} \in \mathbb{K}^X$ à support fini telle que $y = \sum_{x \in X} \lambda_x x$

(Convention : si X est vide, $\sum \lambda_x x = 0$).

b) Sous espace engendré par une famille ou une partie

Approche externe. Soit X une famille (resp. une partie) (éventuellement vide) de vecteurs de E (resp.de E). Il existe un et un seul plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant X. Il est noté $\mathrm{Vect}(X)$. C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X (et donc $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0\}$).

Approche interne. $\mathrm{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X. En particulier, $\mathrm{Vect}(0) = \{0\}$, $\mathrm{Vect}(u) = \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$, $\mathrm{Vect}(u, v) = \left\{\lambda u + \mu v,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\}$, ...

c) Propriétés.
• $\mathrm{Vect}(x_i) = \{\text{C.L. des } x_i\} = \left\{\sum \lambda_i x_i,\ (\lambda_i) \text{ à support fini}\right\} =$ plus petit sev de E contenant (x_i).
• $A \subset \mathrm{Vect}(A)$.
• $A = \mathrm{Vect}(A) \Leftrightarrow A$ sev de E.
• $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$ (réciproque fausse).
• $\mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$, $\mathrm{Vect}(A + B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$,
$\mathrm{Vect}(A \cap B) \subset \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$.

Résumé des différentes techniques de sup permettant de montrer qu'un sous-ensemble F de E est un sev de E.

• Montrer que F contient le vecteur nul et est stable par combinaisons linéaires ($\overrightarrow{0_E} \in F$ et $\forall \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y} \in F$).

• Montrer que F est l'intersection ou la somme de deux ou plusieurs sev ($F = G \cap H$ ou $F = G_1 \cap \ldots \cap G_p$ ou $F = G + H$ ou $F = G_1 + \ldots + G_p$).

• Montrer que F est l'espace engendré par une certaine famille de vecteurs ($F = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_i}\right)_{i \in I}$).

• Montrer que F est le noyau d'une application linéaire.

• Montrer que F est l'orthogonal d'une partie A de E pour un certain produit scalaire ($F = A^{\perp}$).

II. Familles libres. Familles génératrices. Bases

1) Familles libres

$(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre $\Leftrightarrow \forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0\right)$.

$(x_i)_{i \in I}$ est libre $\Leftrightarrow \forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini, $\left(\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0\right)$.

$(x_i)_{i \in I}$ est liée $\Leftrightarrow \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini et les λ_i non tous nuls telle que $\sum \lambda_i x_i = 0$.
Une telle relation est alors une relation de dépendance linéaire.

Une famille infinie est libre si et seulement si toute sous famille finie est libre.
Une famille infinie est liée si et seulement si il existe une sous famille finie liée.

Soit $L = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
- Si L contient $\overrightarrow{0}$ ou 2 vecteurs égaux ou deux vecteurs colinéaires, L est liée (réciproque fausse).
- L est liée $\Leftrightarrow \exists k \in I$ tel que x_k est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I,\ i \neq k}$.
- Toute sur famille d'une famille liée est liée. Toute sous famille d'une famille libre est libre (Convention : $\varnothing$ est libre)
- L est libre $\Leftrightarrow \left(\sum \lambda_i x_i = \sum \mu_i x_i \Leftrightarrow \forall i,\ \lambda_i = \mu_i\right)$ (on peut identifier les coefficients quand L est libre et uniquement quand L est libre)
- Soit $L' = L \cup \{x\}$. (L libre et L' liée) $\Rightarrow x$ est C.L. des vecteurs de L.

Erreur classique : si les vecteurs de la famille sont deux à deux non colinéaires, la famille n'est pas nécessairement libre (penser à trois vecteurs deux à deux non colinéaires dans un même plan vectoriel). La phrase « les vecteurs sont deux à deux non colinéaires et donc la famille est libre » est totalement fausse.

2) Familles génératrices

$(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow \text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E \Leftrightarrow$ tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall x \in E$, $\exists\, (\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini telle que $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.

3) Bases

$(x_i)_{i \in I}$ base de $E \Leftrightarrow$ tout x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $x_i \Leftrightarrow B$ est libre et génératrice $\Leftrightarrow \forall x \in E$, $\exists!\, (\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini telle que $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$..

Si $x = \sum \lambda_i x_i$, les λ_i sont les coordonnées de x dans la base B.

Théorème. Les bases de E sont les parties génératrices minimales pour l'inclusion ou libres maximales.
Quasiment jamais utilisé sous cette forme, mais on utilise plutôt des conséquences du genre : si $x \notin B$, $B \cup \{x\}$ n'est plus libre et si $x \in B$, $B \setminus \{x\}$ n'est plus génératrice.

Résumé des différentes techniques de sup permettant de montrer qu'une famille de vecteurs est une base de E ou simplement une famille libre.

• En dimension quelconque, B est une base si B est libre et génératrice.

• En dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ (la dimension est donc supposée connue), si une famille B est libre de cardinal n, alors B est une base de E et si B est libre de cardinal n, alors B est une base.

• Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, si B_0 est une base connue de E et si B est une famille de n vecteurs, alors B est une base de E si et seulement si $\det_{B_0}(B) \neq 0$ (souvent le plus efficace).

• Si $\mathscr{F}$ est une famille de p vecteurs, $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si le rang r de $\mathscr{F}$ est égal au cardinal p de la famille. Si de plus $\dim(E) = n$, $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $r = p = n$.

• Si B est une famille d'un espace E' qui est l'image d'une base B_0 de E par un isomorphisme, alors B est une base de E'.

• Si E est muni d'un produit scalaire, une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre et en particulier une famille orthonormale est libre.

III. Applications linéaires

1) Définition Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et f une application de E vers F.

$$f \text{ linéaire} \Leftrightarrow, \ \forall (x, y) \in E^2, \ f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E, \ f(\lambda x) = \lambda f(x)$$
$$\Leftrightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \ \forall (x, y) \in E^2, \ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Si f est linéaire , on a toujours $f(0_E) = 0_F$.

Vocabulaire usuel.
Endomorphisme de E = application linéaire de E vers E.
Isomorphisme de E sur F = application linéaire bijective de E sur F.
Automorphisme de E = application linéaire bijective de E sur E = isomorphisme de E sur E.
Forme linéaire sur E = application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

2) Images directes et réciproques

Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f linéaire de E dans F.
L'image directe d'un sous espace de E par f est un sous espace de F.
L'image réciproque d'un sous espace de F par f est un sous espace de E.

En particulier : $\text{Ker}(f) = \{x \in E / \ f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$ est un sous espace de E. $\text{Im}(f) = \{f(x), \ x \in E\} = f(E)$ est un sous espace de F.

Théorème. (f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$) ($f$ surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$) ($f$ bijective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = F$).

Théorème. Soit f linéaire de E vers F. Si X est génératrice de E, $f(X)$ est génératrice de $f(E) = \text{Im}(f)$ et en particulier si f est surjective, $f(X)$ est génératrice de F.
En particulier, si $\dim(E) = n$ puis $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, alors $(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

Théorème. Soit f linéaire de E vers F. Si f est linéaire et X est liée alors $f(X)$ est liée.
Si f est injective et X est libre dans E alors $f(X)$ est libre dans F.

Théorème. Soit f linéaire de E vers F. f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si l'image par f d'une base donnée de E est une base de F.

Détermination. Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $f \in L(E, F)$. f est entièrement déterminée par les $f(e_i)$, $i \in I$, et en particulier une application linéaire qui s'annule sur une base est nulle et deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

3) Ensembles d'applications linéaires
$(L(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$(L(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative si $\dim E > 1$. Elément unité : Id_E)
$(GL(E), \circ)$ est un groupe, non commutatif si $\dim E > 1$.
$GL(E)$ =groupe linéaire de $E = \{$automorphismes de $E\} = \{$inversibles de $L(E)$ pour $\circ\}$.
Danger : si u et v sont dans $GL(E)$, $u + v$ ne l'est que très rarement.
$(\mathscr{L}(E, \mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(L(E, \mathbb{K}) = \{$formes linéaires sur $E\}$.
Si $\dim(E) < +\infty$, $(SL(E), \circ)$ est un groupe. $(SL(E) = \{$endomorphismes de déterminant égal à $1\})$.
$(O(E), \circ)$ est un groupe appelé le groupe orthogonal (notion euclidienne).

IV. Dimension des espaces vectoriels

1) Dimension

E est dit de dimension finie sur $\mathbb{K}$ si et seulement si E admet une partie génératrice finie. E est dit de dimension infinie sinon.
E est aussi dit de dimension infinie si et seulement si E contient une famille libre infinie.
Théorème de la dimension finie et définition. Si E de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal (fini) et $\dim_{\mathbb{K}} E$ est le cardinal d'une base quelconque.
(Convention : $\varnothing$ est une base de $\{0\}$ et $\dim\{0\} = 0$)

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ et si $e_i = (0, 0, ...0, 1, 0, ..., 0)$ alors $B = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension. Si $\dim E = n < +\infty$, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

2) Familles libres et génératrices

Soit $n = \dim E < +\infty$.
Si L est libre alors $\text{card}(L) \leqslant n$ et de plus (L base de $E \Leftrightarrow \text{card}(L) = n$)
Si G est génératrice de E alors $\text{card}(G) \geqslant n$ et de plus (G base de $E \Leftrightarrow \text{card}(G) = n$)

Théorème. Si E est de dimension finie et si $\mathscr{B}$ est une famille de vecteurs de E, 2 des 3 propositions suivantes entrainent la troisième :

(1) $\text{card}(\mathscr{B}) = n$ **(2)** $\mathscr{B}$ est libre **(3)** $\mathscr{B}$ est génératrice de E

Théorème de la base incomplète. Soit L libre dans E ($\dim E < +\infty$), L peut être complétée en une base de E.
Si $\dim E < +\infty$, E admet des bases. Si $\dim E < +\infty$, de toute partie ou famille génératrice de E on peut extraire une base.

3) Sous espaces

Théorème. Soit $n = \dim E < +\infty$ et soit F sev de E alors ($\dim F \leqslant n$ et $\dim F = n \Leftrightarrow F = E$) (faux en dimension infinie).

Théorème. (Supplémentaires) Soit $n = \dim E < +\infty$ et F sev de E. F admet au moins un supplémentaire. Tout supplémentaire a pour dimension : $\dim E - \dim F$.
Plus généralement, $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Théorème. Soient F et G sev de E.
$(E = F \oplus G) \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E) \Leftrightarrow (F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E)$

Théorème. $F_1, \ldots, F_p$ sev de E tels que la somme $\sum F_i$ est directe. $\dim(F_1 \oplus ... \oplus F_p) = \dim F_1 + ... + \dim F_p$.
Théorème. $F_1, \ldots, F_p$ sev de E. $\dim(F_1 + ... + F_p) \leqslant \dim(F_1) + ... + \dim(F_p)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.
Si $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$ et si B_i est une base de F_i alors $B = \bigcup_i B_i$ est une base de E et réciproquement, si $B = \bigcup_i B_i$ est une base de E alors les $F_i = \text{Vect}(B_i)$ sont supplémentaires dans E.

4) Rang

a) d'une famille de vecteurs

Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de p vecteurs de E. $\text{rg}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} = \dim \text{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ = maximum du cardinal d'une sous-famille libre de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.
Si X est une famille de vecteurs de E de rang r et si A est une sous-famille de S : si A est libre alors $\text{card}(A) \leqslant r$ ou encore si $\text{card}(A) > r$, A est liée.
Soient $n = \dim(E)$, $r = \text{rg}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ (et $p = \text{card}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$).
- $r \leqslant p$ et ($r = p \Leftrightarrow (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre.
- $r \leqslant n$ et ($r = n \Leftrightarrow (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est génératrice de E.
- $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ base de $E \Leftrightarrow r = p = n$.

b) d'une application linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$. Si $\dim(E) = n < +\infty$ et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base quelconque de E, $\text{rg}(f) = \text{rg}\left((f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)$.

Théorème du rang. Soit $f \in L(E, F)$ où E est de dimension finie.
La restriction de f à un supplémentaire S de $\text{Ker}(f)$ dans E réalise un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$.
En particulier, $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$ ou aussi $\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f))$.

Théorème. Si $\dim E = \dim F < +\infty$ alors $f \in L(E, F)$ est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective $\Leftrightarrow$ f est bijective.

Théorème. Si $n = \dim E < +\infty$ et $f \in L(E)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) f bijective

2) f injective
3) f surjective
4) $\text{Ker}(f) = \{0\}$
5) $\text{Im}(f) = E$
6) $\text{rg}(f) = n$
7) l'image d'une base de E par f est une base de E
8) $\det(f) \neq 0$
9) la matrice de f dans une base donnée de E est inversible
10) f inversible à droite (pour $\circ$) ou f inversible à gauche ou f inversible
11) f simplifiable à gauche (pour $\circ$) ou f est simplifiable à droite ou f est simplifiable

c) Transformations d'une famille de vecteurs ne modifiant pas le rang (car ne modifiant pas le sous-espace engendré).

Les transformations suivantes ne modifie pas le rang :
- permuter les vecteurs de X.
- remplacer un vecteur x de X par λx où λ est un nombre non nul.
- ajouter à un vecteur x de X un autre vecteur de X.
- ajouter à un vecteur x de X une combinaison linéaire des autres vecteurs de X.
- supprimer un vecteur nul ou plus généralement supprimer un vecteur combinaison linéaire des autres vecteurs

5) Dimensions usuelles

$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$ et $\dim(E_1 \times \ldots \times E_p) = \dim E_1 + \ldots + \dim E_p$.
$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$ et $\dim(E_1 \oplus \ldots \oplus E_p) = \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_p)$.
$\dim(L(E,F)) = \dim E \times \dim F$ et en particulier $\dim(L(E)) = (\dim(E))^2$ et $\dim(\mathscr{L}(E,\mathscr{K})) = \dim(E)$.
$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

6) Hyperplans

Si E est de dimension quelconque, un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Si $\dim(E) = n \geqslant 2$, un hyperplan de E est un sev de E de dimension $n-1$ d'après le théorème du rang.

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Soit F un sev de E. F est un hyperplan de E si et seulement si il existe D droite vectorielle telle que $E = F \oplus D$.

Théorème. Soit Eun espace de dimension finie.
- Un sev de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$ est l'intersection de $n-p$ hyperplans.
- Inversement, une intersection de $n-p$ hyperplans est un sev de dimension supérieure ou égale à $n-p$.

V. Sous-espaces affines

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un sous-espace affine de E est un sous-ensemble de la forme $\mathscr{F} = A+F = \left\{A + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in F\right\}$ où A est un point de E (ou encore un élément de E) et F est un sev de E. Dans ce cas, F est uniquement défini (mais pas A) et s'appelle la direction du sous-espace affine $\mathscr{F}$.
La dimension du sous-espace affine $\mathscr{F}$ est la dimension de sa direction F.

Théorème. L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, de directions respectives F et G, est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Si E est de dimension finie n et $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B}) = \left(O, (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)$ est un repère de E, un hyperplan affine a une équation de la forme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, et réciproquement un sous-ensemble d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, est un hyperplan affine de direction l'hyperplan vectoriel d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ dans $\mathscr{B}$.
Plus généralement, un sous-espace affine de dimension $n-p$ admet un système d'équation de la forme
$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \\ a_{p,1}x_1 + \ldots + a_{p,n}x_n = b_p \end{array}\right. .$$
Inversement, l'ensemble des solutions d'un système de la forme $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \\ a_{p,1}x_1 + \ldots + a_{p,n}x_n = b_p \end{array}\right.$ est soit vide, soit un sous-espace affine de dimension $n-r$ où r est le rang du système et en particulier de dimension supérieure ou égale à $n-p$.