

Problème 1 : sommes de Riemann

Partie A : convergence des sommes de Riemann

1. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ et donc uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine.

Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\frac{\varepsilon}{b-a}$ est un réel strictement positif. Donc, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, si $|x-y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (x, y) \in [a, b]^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [a, b]^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

2.1. Soit $N = \lceil \frac{b-a}{\eta} \rceil + 1$. Alors N est un entier naturel non nul tel que $N \geq \frac{b-a}{\eta}$.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq N$. Alors $n \geq N \geq \frac{b-a}{\eta}$ puis $\frac{b-a}{n} \leq \eta$.

Soient $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ puis $t \in [x_k, x_{k+1}]$.

$$|t - x_k| \leq |x_{k+1} - x_k| = \frac{b-a}{n} \leq \eta,$$

et donc $|f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. On a montré que

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in [x_k, x_{k+1}], |f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

2.2. Soient $n \geq N$ puis $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Puisque $x_k \leq x_{k+1}$, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \leq (x_{k+1} - x_k) \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{b-a}{n} \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{n}.$$

Soit de nouveau $n \geq N$. D'après la relation de CHASLES,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)S_n(f) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)S_n(f) \right| \leq \varepsilon)$. Ainsi, la suite $((b-a)S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$

converge et a pour limite $\int_a^b f(t) dt$ ou encore la suite $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n(f) = \frac{-f(x_0) + f(x_n)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{f(b) - f(a)}{n} + S_n(f)$$

et donc, puisque $\frac{f(b) - f(a)}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite $(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $j = n + k$, on obtient

$$u_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

Posons $a = 0$, $b = 1$, puis pour tout x de $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $x_k = a + k \frac{b-a}{n} = \frac{k}{n}$. Alors,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = R_n(f).$$

Puisque la fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ en tant que fraction rationnelle définie sur $[0, 1]$, la somme de RIEMANN $R_n(f)$ converge et a pour limite $\frac{1}{1-0} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \ln 2.$$

5.

5.1. La fonction f' est définie et continue sur le segment $[0, 1]$. On en déduit que la fonction f' est bornée sur $[0, 1]$. Par suite, il existe un réel M tel que, pour tout réel t de $[0, 1]$, $|f'(t)| \leq M$.

5.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ puis $t \in [x_k, x_{k+1}]$. Les réels t et x_k sont éléments de $[a, b]$, f est dérivable sur $[a, b]$ et $|f'|$ est majorée sur $[a, b]$ par le réel M . D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(t) - f(x_k)| \leq M|t - x_k| = M(t - x_k)$.

5.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t - x_k) dt = M \left[\frac{(t - x_k)^2}{2} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\ &= M \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{M(b-a)^2}{2n^2}. \end{aligned}$$

puis, comme à la question 2.2.,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)S_n(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(b-a)^2}{2n^2} = n \times \frac{M(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

6.

6.1. f est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel x de $[0, 1]$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ puis $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. La fonction f'' est négative sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et positive sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. On en déduit que la fonction f' est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Mais alors, pour tout réel x de $[0, 1]$, $f' \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq f'(x) \leq \text{Max}\{f'(0), f'(1)\} = 0$ et donc $|f'(x)| \leq -f' \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{e}}$.

6.2. D'après la question 5.3, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - (1-0)S_n(f) \right| = \left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k^2/n^2} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{e}} \frac{(1-0)^2}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}e} \times \frac{1}{n}.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$.

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - (1-0)S_n(f) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2e}} \times \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow n \geq \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow n = \mathbb{E} \left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{e}} \right) + 1.$$

Pour cette valeur de n , la valeur exacte de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k^2/n^2}$ est une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ près et donc une valeur approchée à $\frac{\varepsilon}{2}$ près de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k^2/n^2}$ est une valeur approchée à ε près de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

Algorithme.

Variables	e est un réel strictement positif n est un entier naturel non nul k est un entier naturel S est un réel
Initialisation	Demander e Affecter à n la valeur $\mathbb{E} \left(\sqrt{2} / \left(e * \sqrt{\exp(1)} \right) \right) + 1$ Affecter à S la valeur 0
Traitement	Pour k variant de 0 à $n - 1$ Affecter à S la valeur $S + \exp(-k^2/n^2)$ Fin du Pour Afficher une valeur décimale approchée à $e/2$ près de S/n Fin

Partie B : application à l'étude de suites

1. Soit $n \geq 2$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Alors $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subset]0, 1]$. Donc, f est définie, continue et décroissante sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$.

Par suite, pour t de $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$, $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$. En intégrant, on obtient

$$\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ou encore

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. En additionnant membres à membres les inégalités précédentes, on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ou encore

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Mais alors, $r_n - \frac{f(1)}{n} \geq I\left(\frac{1}{n}\right)$ et $r_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right)$ ou encore

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{f(1)}{n} \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} I(x) = \ell$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$. Enfin, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(1)}{n} = 0$.

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{f(1)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \ell$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \ell$.

4.

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4} \left(\frac{k^2}{n^2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right) = \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{2n} \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times 4n^3} - \frac{n}{4n} - \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n!}{n^n} \right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n!}{n^n} \right) \end{aligned}$$

4.2. La fonction f est définie et continue sur $]0, 1]$. f est dérivable sur $]0, 1]$ et pour $x \in]0, 1]$,

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

La fonction f' est négative sur $]0, 1]$ et donc la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$. Ensuite, $xf(x) = \frac{x^3 - x}{4} - \frac{1}{2}x \ln x$ tend vers 0 quand x tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. Enfin, pour $x \in]0, 1]$,

$$\int_x^1 f(t) dt = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) - \frac{1}{2}(t \ln t - t) \right]_x^1 = \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - x \right) - \frac{1}{2}(x \ln x - x) \right).$$

Quand x tend vers 0, cette expression tend vers $\ell = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. D'après la question 3, on peut affirmer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{1}{3}$.

D'après la question 4.1, pour $n \geq 1$,

$$\ln \left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2} - \frac{1}{2} - 2r_n,$$

puis

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \exp \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2} - \frac{1}{2} - 2r_n \right).$$

On en déduit que la suite $\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \exp \left(\frac{2}{12} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{e}.$$

Partie C : une suite d'intégrales

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour tout x de $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n} \right]$, $n x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ et donc $|\sin(nx)| = (-1)^k \sin(nx)$ puis

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)| dx &= (-1)^k \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \sin(nx) dx = (-1)^k \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \\ &= \frac{(-1)^k}{n} (-\cos((k+1)\pi) + \cos(k\pi)) = \frac{(-1)^k}{n} (-(-1)^{k+1} + (-1)^k) = \frac{(-1)^k}{n} \times 2(-1)^k = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

2.

2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Puisque est croissante sur $[0, \pi]$ et que $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n} \right] \subset [0, \pi]$, pour tout réel x de $[0, \pi]$,

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

puis, après multiplication des trois membres de l'encadrement par le réel positif $|\sin(n\pi x)|$,

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right) |\sin(n\pi x)| \leq f(x) |\sin(n\pi x)| \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) |\sin(n\pi x)|.$$

En intégrant, on obtient

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(n\pi x)| dx \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x) |\sin(n\pi x)| dx \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(n\pi x)| dx.$$

ou encore

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x) |\sin(n\pi x)| dx \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

2.2. En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x) |\sin(n\pi x)| dx \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

ou encore

$$2S_n(g) \leq \int_0^\pi f(x) |\sin(n\pi x)| dx \leq 2R_n(g)$$

ou g est la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto f(\pi x)$$

2.3. Puisque la fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$, les deux membres tend vers $2 \int_0^1 g(t) dt = 2 \int_0^1 f(\pi t) dt$ ou encore, en posant $x = \pi t$, les deux membres tend vers $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$.

D'après le théorème des gendarmes, la suite $\left(\int_0^\pi f(x) |\sin(n\pi x)| dx \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) |\sin(n\pi x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$.

2.4. Si la fonction f est continue et décroissante sur $[0, \pi]$, la fonction $-f$ est continue et croissante sur $[0, \pi]$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi -f(x) |\sin(n\pi x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -f(x) dx$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) |\sin(n\pi x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$ par linéarité de l'intégrale. On obtient donc le même résultat dans ce cas aussi.

Partie D : une application aux probabilités

1.

1.1. Soit $(k, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Les deux fonctions $x \mapsto x^k$ et $x \mapsto -\frac{1-x}{m+1}^{m+1}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} I_{k,m} &= \int_0^1 x^k (1-x)^m dx = \left[x^k \times -\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 - \int_0^1 kx^{k-1} \times -\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1} dx \\ &= \frac{k}{m+1} \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{m+1} dx \quad (0^k = (1-1)^{m+1} = 0 \text{ car } k \geq 1 \text{ et } m+1 \geq 1) \\ &= \frac{k}{m+1} I_{k-1, m+1}. \end{aligned}$$

1.2. Soit $(k, m) \in \mathbb{N}^2$.

$$I_{0, k+m} = \int_0^1 x^0 (1-x)^{k+m} dx = \left[-\frac{(1-x)^{k+m+1}}{k+m+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+m+1}.$$

Par suite, pour $k \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$I_{k,m} = \frac{k}{m+1} \times \frac{k-1}{m+2} \times \dots \times \frac{1}{m+k} \times I_{0,m+k} = \frac{k \times (k-1) \times \dots \times 1}{(m+1)(m+2)\dots(m+k+1)} = \frac{k!m!}{(m+k+1)!}$$

ce qui reste vrai quand $k = 0$.

2. La variable aléatoire X est régie par une loi binomiale de paramètres n et p . En effet,

- on effectue n fois une même expérience de manière indépendante
- chaque expérience a deux éventualités à savoir « obtenir une boule rouge » avec une probabilité p et « ne pas obtenir une boule rouge » avec une probabilité $1 - p$.

On sait alors que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ et que $E(X) = np$.

3.

3.1. Pour $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, notons U_j la probabilité que l'urne choisie soit l'urne $n^o j$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_N = k) &= \sum_{j=1}^N P(U_j) \times P_{U_j}(X_N = k) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

3.2.

$$\begin{aligned} E(X_N) &= \sum_{k=0}^n k P(X_N = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \right) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N n \times \frac{j}{N} \quad (\text{l'espérance de la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{j}{N} \text{ est } n \times \frac{j}{N}) \\ &= \frac{n}{N^2} \times \frac{N(N+1)}{2} = \frac{n(N+1)}{2N}. \end{aligned}$$

En particulier, $\lim_{N \rightarrow +\infty} E(X_N) = \frac{n}{2}$.

3.3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour $x \in [0, 1]$, posons $f(x) = x^k(1-x)^{n-k}$. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc, quand N tend vers $+\infty$, la somme de RIEMANN

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f\left(\frac{j}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k},$$

tend vers $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx = I_{k,n-k} = \frac{k!(n-k)!}{(k+n-k+1)!} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$ d'après la question 1.2. Comme

$$p_N(k) = \binom{n}{k} \times \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}$$

on a donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, la suite de variables aléatoires $(X_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population

Partie A : la fonction exponentielle

1.

1.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f(x) \times f(-x)$. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

Donc, g est constante sur \mathbb{R} . On en déduit que pour tout réel x , $g(x) = g(0) = [f(0)]^2 = 1$. On a montré que pour tout réel x , $f(x) \times f(-x) = 1$.

1.2. En particulier, pour tout réel x , $f(x) \times f(-x) \neq 0$ et donc pour tout réel x , $f(x) \neq 0$.

1.3. Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $g(0) = 1$ et $g' = g$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel x ,

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{[f(x)]^2} = 0.$$

Donc la fonction φ est constante sur \mathbb{R} . On en déduit que pour tout réel x , $\varphi(x) = \varphi(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$ et donc que pour tout réel x , $g(x) = f(x)$. Ceci montre l'unicité de la fonction f .

1.4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On sait que $f(a) \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\psi(x) = \frac{f(a+x)}{f(a)}$. La fonction ψ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$\psi'(x) = \frac{f'(a+x)}{f(a)} = \frac{f(a+x)}{f(a)} = \psi(x).$$

De plus, $\psi(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1$. En résumé, la fonction ψ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $\psi' = \psi$ et $\psi(0) = 1$. Par unicité d'une telle fonction, on a $\psi = f$ et donc pour tout réel x , $\frac{f(a+x)}{f(a)} = f(x)$ ou encore pour tout réel x , $f(a+x) = f(a) \times f(x)$. On a montré que pour tous réels a et b , $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.

1.5. En particulier, pour tout réel a , $f(a) = \left[f\left(\frac{a}{2}\right) \right]^2 \geq 0$. Comme d'autre part, la fonction f ne s'annule pas sur \mathbb{R} , pour tout réel a , $f(a) > 0$.

2.

2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$. Alors, $-1 < \frac{x}{n} < 1$ puis $1 + \frac{x}{n} > 0$ et $1 - \frac{x}{n} > 0$. $u_n(x)$ et $u_n(-x)$ existent et $u_n(-x)$ n'est pas nul. Donc, $u_n(x)$ et $v_n(x)$ existent.

2.2. Soit $a \in]-1, +\infty[$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

- L'inégalité est vraie quand $n = 1$ puisque $(1+a)^1 = 1+a \geq 1+1 \times a$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $(1+a)^n \geq 1+na$.

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \times (1+a) \\ &\geq (1+na) \times (1+a) \text{ (par hypothèse de récurrence et car } 1+a \geq 0) \\ &= 1 + (n+1)a + na^2 \\ &\geq 1 + (n+1)a. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

2.3. i. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$. Alors, $1 + \frac{x}{n} > 0$ puis $u_n(x) \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) \times \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = u_n(x) \times \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \\ &= u_n(x) \times \left(1 + \frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$ (donc $n \in \mathbb{N}^*$). Soit $a = \frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} - 1 = -\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}$.

Si $x \leq 0$, cette dernière expression est positive et donc $a \in]-1, +\infty[$. Si $x > 0$, alors $\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} > 0$ puis $a > -1$ et encore une fois $a \in]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer l'inégalité de BERNOULLI et on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} &= (1+a)^{n+1} \\ &\geq 1 + (n+1)a = 1 + (n+1) \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} - 1\right) = n + (n+1) \frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} \\ &= \frac{n+x + (n+1) + x}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{2n+1+2x}{1 + \frac{x}{n}} \\ &\geq \frac{2n+1-2|x|}{1 + \frac{x}{n}} \quad (\text{car } 1 + \frac{x}{n} > 0) \\ &\geq \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \quad (\text{car } 2n - 2|x| = 2(n - |x|) \geq 0). \end{aligned}$$

iii. Puisque $1 + \frac{x}{n} > 0$, on en déduit que $\left(1 + \frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq 1$ puis, comme $u_n(x)$ est positif, on a

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \left(1 + \frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq u_n(x) \times 1 = u_n(x).$$

Ceci montre que la suite $(u_n(x))_{n > |x|}$ est croissante.

2.4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, la suite $(u_n(-x))_{n > |x|}$ est croissante et strictement positive. Mais alors la suite $(v_n(x))_{n > |x|}$ est décroissante en tant qu'inverse d'une suite strictement positive croissante.

2.5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$.

i.

$$\begin{aligned} v_n(x) - u_n(x) &= v_n(x) \left(1 - \frac{u_n(x)}{v_n(x)}\right) = v_n(x) (1 - u_n(x)u_n(-x)) = v_n(x) \left(1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) \\ &= v_n(x) \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

ii. Puisque $|x| < n$, on a $x^2 < n^2$ puis $0 \leq 1 - \frac{x^2}{n^2} \leq 1$ puis $0 \leq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$ (par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0, 1]$) et enfin $1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 0$. Comme d'autre part $v_n(x) \geq 0$, on a montré que $v_n(x) - u_n(x) \geq 0$.

iii. Puisque $0 \leq \frac{x^2}{n^2} < 1$, on a $-\frac{x^2}{n^2} \in]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer l'inégalité de BERNOULLI qui fournit $\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 + n \left(-\frac{x^2}{n^2}\right) = 1 - \frac{x^2}{n}$ puis $1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{x^2}{n}$. Puisque $v_n(x) \geq 0$, on en déduit que

$$v_n(x) - u_n(x) = v_n(x) \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \leq v_n(x) \frac{x^2}{n}.$$

2.6. D'après la question 2.4, la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante. Donc, pour tout entier naturel $n > |x|$, on a $v_n(x) \times \frac{x^2}{n} \leq v_{E(|x|)+1}(x) \times \frac{x^2}{n}$. Mais alors, d'après les questions 2.5.ii et 2.5.iii, pour tout entier naturel $n > |x|$,

$$0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_{E(|x|)+1}(x) \times \frac{x^2}{n}.$$

Les deux membres de cet encadrement tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$ converge et a pour limite 0.

En résumé, la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante, la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante et la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$ converge vers 0. Donc les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes. On en déduit que ces deux suites sont convergentes de même limite.

2.7. i. Pour tout entier naturel non nul n , $u_n(0) = \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(0) = 1$.

ii. Pour $a = x_0$ et $k = h$, on obtient $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq hf(x_0)$.

Pour $a = x_0 + h$ et $k = -h$, on obtient $f(x_0) - f(x_0 + h) \geq -hf(x_0 + h)$ puis $-(1 - h)f(x_0 + h) \geq -f(x_0)$ puis $(1 - h)f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ puis $f(x_0 + h) \leq \frac{1}{1 - h}f(x_0)$ (car $1 - h > 0$) puis $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq \left(\frac{1}{1 - h} - 1\right)f(x_0)$ et enfin $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq \frac{h}{1 - h}f(x_0)$.

iii. Soit $h \in]0, 1[$. D'après la question précédente, $f(x_0) \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_0)}{1 - h}$. Quand h tend vers 0 par valeurs supérieures, les deux membres de cet encadrement tendent vers $f(x_0)$. On en déduit que le taux $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite à droite en 0 et que cette limite à droite est égale à $f(x_0)$.

Soit $h \in]-1, 0[$. D'après la question précédente, $f(x_0) \geq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq \frac{f(x_0)}{1 - h}$. Quand h tend vers 0 par valeurs inférieures, les deux membres de cet encadrement tendent vers $f(x_0)$. On en déduit que le taux $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite à gauche en 0 et que cette limite à gauche est égale à $f(x_0)$.

En résumé, f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et ses dérivées à gauche et à droite sont égales. On en déduit que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = f(x_0)$.

f est donc l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} , égale à sa dérivée et telle que $f(0) = 1$.

Partie B : évolution d'une population

1. L'équation différentielle (E) s'écrit $y' = f(x, y)$ où pour tous réels x et y , $f(x, y) = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$. La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 en tant que polynôme à deux variables. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, l'équation (E) admet une solution maximale et une seule prenant la valeur N_0 en 0.

N étant par définition une solution maximale prenant la valeur N_0 en 0, on a montré l'existence et l'unicité de la fonction N .

2.

2.1. Pour tout réel $t \in I$, $N(t) < K$ puis $\frac{N(t)}{K} < 1$ (car $K > 0$) et donc $1 - \frac{N(t)}{K} > 0$. D'autre part, $r > 0$ et pour tout t de I , $N(t) > 0$. Finalement, pour tout réel t de I ,

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) > 0.$$

La fonction N est donc strictement croissante sur I .

2.2. I contient $[0, +\infty[$. La fonction N est croissante sur I et est majorée par K sur I . On en déduit que la fonction N a une limite réelle ℓ quand t tend vers $+\infty$ et que $\ell \leq K$. Notons d'autre part que $\ell \geq N(0) = N_0 > 0$.

2.3. Supposons par l'absurde $\ell < K$. La fonction N' tend donc vers $r\ell \left(1 - \frac{\ell}{K}\right) = L$. L est un réel strictement positif.

Il existe alors un réel $A > 0$ tel que pour $t \geq A$, on a $N'(t) \geq \frac{L}{2}$. Par intégration, pour tout $t \geq A$, on a $N(t) \geq N(A) + \frac{L}{2}(t - A)$. Puisque $\frac{L}{2} > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(A) + \frac{L}{2}(t - A) = +\infty$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$. Ceci est faux et donc $\ell = K$.

3.

3.1. La fonction g est définie et dérivable sur I en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I . Pour tout réel t de I ,

$$g'(t) = -\frac{N'(t)}{(N(t))^2} = -\frac{1}{(N(t))^2} \times rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = -\frac{r}{N(t)} + \frac{r}{K} = -rg(t) + \frac{r}{K}.$$

La fonction g est donc solution de l'équation différentielle $y' = -ry + \frac{r}{K}$ sur I .

3.2. (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Une solution particulière de (E') sur \mathbb{R} est la fonction constante $t \mapsto \frac{1}{K}$ et une solution non nulle sur \mathbb{R} de l'équation homogène associée est la fonction $t \mapsto e^{-rt}$. Les solutions de (E') sur \mathbb{R} sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il existe un réel λ tel que pour tout $t \in I$, $\frac{1}{N(t)} = \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$. La condition $N(0) = N_0$ fournit $\lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}$ et donc, pour tout $t \in I$,

$$N(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right) e^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}}.$$

3.3. Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} = 0$, on retrouve $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$.