EXERCICE 2

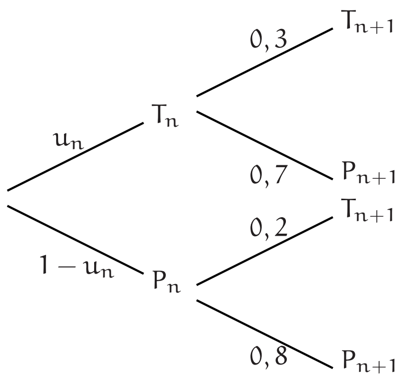
1) a) L'énoncé donne $p(T_1) = \dfrac{1}{2}$ et $p(P_1) = p(\overline{T_1}) = \dfrac{1}{2}$ puis $p_{T_1}(T_2) = 0,3$ et $p_{P_1}(T_2) = 1 - p_{P_1}(P_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

b) D'après la formule des probabilités totales et puisque P_2 est l'événement contraire de l'événement T_2,

$$\begin{aligned} p(T_2) &= p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2) \\ &= \frac{1}{2} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,2 = \frac{1}{2} \times (0,3 + 0,2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(T_2) = \frac{1}{4}.}$$

c) Représentons la situation par un arbre.



$p_{T_n}(P_{n+1}) = 1 - p_{T_n}(T_{n+1}) = 1 - 0,3 = 0,7$

$p_{P_n}(T_{n+1}) = 1 - p_{P_n}(P_{n+1}) = 1 - 0,2 = 0,8$

d) D'après la formule des probabilités totales et puisque P_n et P_{n+1} sont respectivement les événements contraires de T_n et T_{n+1},

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = p(T_n) \times p_{T_n}(T_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(T_{n+1}) \\ &= u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,1\, u_n + 0,2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,1\, u_n + 0,2.}$$

e) La machine donne

n	u_n
1	0,5
2	0,25
3	0,225
4	0,2225
5	0,22225
6	0,222225

Il semblerait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0,222\ldots$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{10}{45}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{10} \text{ et de premier terme } v_1 = \frac{5}{18}.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18 \times 10^{n-1}}.$$

On en déduit que $u_n = \dfrac{2}{9} + v_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{18 \times 10^{n-1}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18 \times 10^{n-1}}.}$$

c) Puisque $10 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 10^n = +\infty$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{18 \times 10^{n-1}} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}.}$$

Puisque $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$, la conjecture émise en 1)e) est validée.