## EXERCICE 2 (5 points)

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité.**

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir. On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3. Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8. Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère l'événement :

$T_n$ : « le manchot utilise le toboggan lors de son $n$-ième passage. »

$P_n$ : « le manchot utilise le plongeoir lors de son $n$-ième passage. »

On considère alors la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

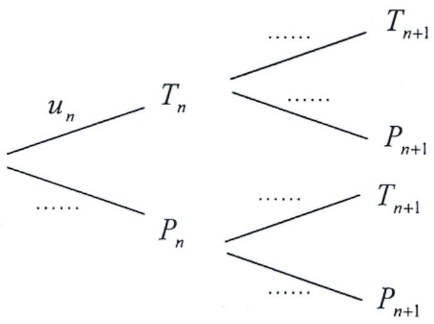
$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'événement $T_n$.

**1) a)** Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

**b)** Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.

**c)** Recopier et compléter l'arbre suivant :




**d)** Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,1\,u_n + 0,2$.

**e)** À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite $(u_n)$.

**2)** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}$$

**a)** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

**b)** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**c)** Calculer la limite de la suite $(u_n)$. Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en **1) e)** ?

## EXERCICE 2

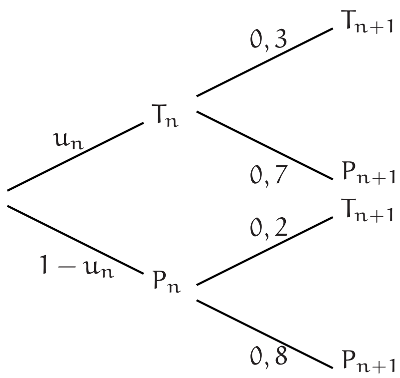
**1) a)** L'énoncé donne $p(T_1) = \dfrac{1}{2}$ et $p(P_1) = p(\overline{T_1}) = \dfrac{1}{2}$ puis $p_{T_1}(T_2) = 0,3$ et $p_{P_1}(T_2) = 1 - p_{P_1}(P_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

**b)** D'après la formule des probabilités totales et puisque $P_2$ est l'événement contraire de l'événement $T_2$,

$$\begin{aligned} p(T_2) &= p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2) \\ &= \frac{1}{2} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,2 = \frac{1}{2} \times (0,3 + 0,2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(T_2) = \frac{1}{4}.}$$

**c)** Représentons la situation par un arbre.




$p_{T_n}(P_{n+1}) = 1 - p_{T_n}(T_{n+1}) = 1 - 0,3 = 0,7$

$p_{P_n}(T_{n+1}) = 1 - p_{P_n}(P_{n+1}) = 1 - 0,2 = 0,8$

**d)** D'après la formule des probabilités totales et puisque $P_n$ et $P_{n+1}$ sont respectivement les événements contraires de $T_n$ et $T_{n+1}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = p(T_n) \times p_{T_n}(T_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(T_{n+1}) \\ &= u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,1\, u_n + 0,2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,1\, u_n + 0,2.}$$

**e)** La machine donne

| $n$ | $u_n$ |
|---|---|
| 1 | $0,5$ |
| 2 | $0,25$ |
| 3 | $0,225$ |
| 4 | $0,2225$ |
| 5 | $0,22225$ |
| 6 | $0,222225$ |

Il semblerait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0,222\ldots$.

**2) a)** Soit $n$ un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{10}{45}\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{10} \text{ et de premier terme } v_1 = \frac{5}{18}.}$$

**b)** Soit $n$ un entier naturel non nul.

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18 \times 10^{n-1}}.$$

On en déduit que $u_n = \dfrac{2}{9} + v_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{18 \times 10^{n-1}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18 \times 10^{n-1}}.}$$

**c)** Puisque $10 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 10^n = +\infty$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{18 \times 10^{n-1}} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}.}$$

Puisque $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$, la conjecture émise en 1)e) est validée.