EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.
La probabilité que la cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'événement : « la n-ème cible est atteinte »,
- $\overline{A_n}$ l'événement : « la n-ème cible n'est pas atteinte »,
- a_n la probabilité de l'événement A_n,
- b_n la probabilité de l'événement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1. Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, n > 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$ puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

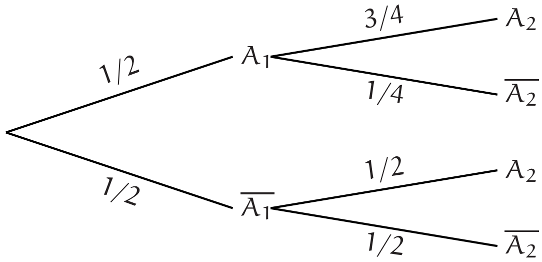
c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 0,6665$.

EXERCICE 3

1) L'énoncé donne $a_1 = p(A_1) = \dfrac{1}{2}$ puis $b_1 = p(\overline{A_1}) = 1 - p(A_1) = 1 - a_1 = \dfrac{1}{2}$.

L'énoncé donne encore $p_{A_1}(A_2) = \dfrac{3}{4}$ et $p_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{1}{2}$. Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_2 = p(A_2) &= p(A_1 \cap A_2) + p(\overline{A_1} \cap A_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) + p(\overline{A_1}) \times p_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}, \end{aligned}$$

et donc aussi $b_2 = 1 - a_2 = \dfrac{3}{8}$.

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{2},\ b_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{5}{8} \text{ et } b_2 = \frac{3}{8}.}$$

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Toujours d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = p(A_{n+1}) &= p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A_n}) \times p_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}.}$$

3) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}U_n. \end{aligned}$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = a_1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6}$.

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{4} \text{ et de premier terme } U_1 = -\frac{1}{6}.}$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = U_1 \times q^{n-1} = -\dfrac{1}{6 \times 4^{n-1}}$. On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $a_n = \dfrac{2}{3} + U_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6 \times 4^{n-1}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}.}$$

c) $4 > 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^{n-1} = +\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{6 \times 4^{n-1}} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}.}$$

d) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
a_n > 0,6665 &\Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{6 \times 4^{n-1}} > 0,6665 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3} - 0,6665 > \frac{1}{6 \times 4^{n-1}} \\
&\Leftrightarrow 4^{n-1} > \frac{1}{6\left(\frac{2}{3} - 0,6665\right)} \text{ (car } \frac{2}{3} - 0,6665 > 0) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(4^{n-1}\right) > \ln\left(\frac{1}{6\left(\frac{2}{3} - 0,6665\right)}\right) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow (n-1)\ln(4) > \ln\left(\frac{1}{6\left(\frac{2}{3} - 0,6665\right)}\right) \\
&\Leftrightarrow n - 1 > \frac{1}{\ln(4)} \times \ln\left(\frac{1}{6\left(\frac{2}{3} - 0,6665\right)}\right) \text{ (car } \ln(4) > 0) \\
&\Leftrightarrow n > 1 + \frac{1}{\ln(4)} \times \ln\left(\frac{1}{6\left(\frac{2}{3} - 0,6665\right)}\right) \\
&\Leftrightarrow n > 5,9\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 6 \text{ (car } n \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel n tel que $a_n > 0,6665$ est 6.

