BACCALAUREAT GENERAL

Session de mai 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

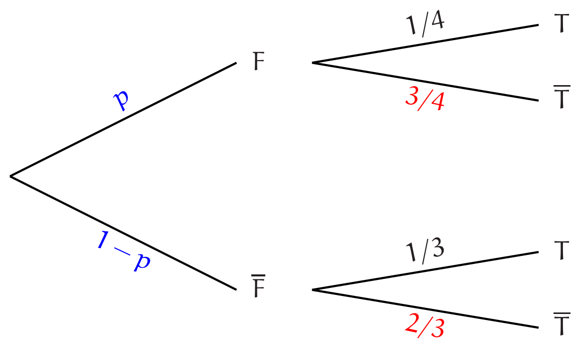
Enseignement Obligatoire

Rochambeau

EXERCICE 1

Partie A

1) L'énoncé fournit $p_F(T) = \frac{1}{4}$, $p_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{3}$ et $p(T) = \frac{3}{10}$. Posons $p = p(F)$. Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p(F \cap T) + p\left(\overline{F} \cap T\right) = p(F) \times p_F(T) + p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(T),$$

et donc $\frac{1}{4}p + \frac{1}{3}(1-p) = \frac{3}{10}$ puis $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)p = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}$ puis $\frac{p}{12} = \frac{1}{30}$ et finalement

$$p(F) = \frac{12}{30} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{p(F) = \frac{2}{5}.}$$

2) La probabilité demandée est $p_T(F)$.

$$p_T(F) = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{p(F) \times p_F(T)}{p(T)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{p_T(F) = \frac{1}{3}.}$$

Partie B

1) a) Notons Y le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le membre choisi adhère à la section tennis » avec une probabilité $p = \frac{3}{10}$ ou « le membre choisi n'adhère pas à la section tennis » avec une probabilité $1 - p = \frac{7}{10}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{3}{10}$.

La probabilité demandée est $p(Y = 2)$ et on sait que

$$p(Y = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{3^2 \times 7^2}{10^4} = \frac{2646}{10^4} = 0,2646.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remplace 4 par n et on obtient pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$p(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{7}{10}\right)^{n-k}.$$

Par suite,

$$p_n = p\left(Y \geqslant 1\right) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{3}{10}\right)^n\left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geqslant 100 \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{10}{7}\right) \Leftrightarrow \ln(100) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \Leftrightarrow \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{10}{7}\right)} \Leftrightarrow n \geqslant 12,9\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 13 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$ est 13.

2) La variable aléatoire X prend trois valeurs : $35 = 40 - 5$ quand le joueur tire deux jetons gagnants, $15 = 20 - 5$ quand le joueur tire un jeton gagnant et -5 quand le joueur ne tire aucun jeton gagnant.

- La probabilité de tirer deux jetons gagnants est $\dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{\frac{10 \times 9}{2}}{\frac{100 \times 99}{2}} = \dfrac{10 \times 9}{10 \times 10 \times 9 \times 11} = \dfrac{1}{110}$.
- La probabilité de tirer un jeton gagnant est $\dfrac{\binom{10}{1} \times \binom{90}{1}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{10 \times 90}{\frac{100 \times 99}{2}} = \dfrac{20}{110}$.
- La probabilité de ne tirer aucun jeton gagnant est $\dfrac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{\frac{90 \times 89}{2}}{\frac{100 \times 99}{2}} = \dfrac{90 \times 89}{100 \times 99} = \dfrac{89}{110}$.

Donnons la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	35	15	-5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{110}$	$\frac{20}{110}$	$\frac{89}{110}$

b) L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = 35 \times \frac{1}{110} + 15 \times \frac{20}{110} - 5 \times \frac{89}{110} = \frac{35 + 300 - 445}{110} = -1.$$

Le gain algébrique moyen à cette loterie est -1 €ou encore en moyenne, le joueur perd 1 euro par partie jouée. Le gain algébrique est strictement négatif et donc le jeu est défavorable au joueur.

