

EXERCICE 1 (5 points)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

PARTIE A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

F l'événement « le membre choisi est une femme »,

T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

- 1) Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$.
- 2) On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

PARTIE B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

- 1) Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard et de manière indépendante pour tenir la loterie.
 - a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
 - b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

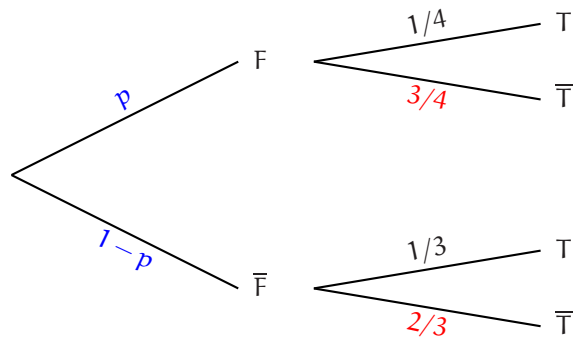
Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

- c) Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.
- 2) Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.
Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie à cette loterie.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
 - b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 1

Partie A

1) L'énoncé fournit $p_F(T) = \frac{1}{4}$, $p_{\bar{F}}(T) = \frac{1}{3}$ et $p(T) = \frac{3}{10}$. Posons $p = p(F)$. Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p(F \cap T) + p(\bar{F} \cap T) = p(F) \times p_F(T) + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(T),$$

et donc $\frac{1}{4}p + \frac{1}{3}(1-p) = \frac{3}{10}$ puis $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)p = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}$ puis $\frac{p}{12} = \frac{1}{30}$ et finalement

$$p(F) = \frac{12}{30} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{2}{5}.$$

$p(F) = \frac{2}{5}.$

2) La probabilité demandée est $p_T(F)$.

$$p_T(F) = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{p(F) \times p_F(T)}{p(T)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3}.$$

$p_T(F) = \frac{1}{3}.$

Partie B

1) a) Notons Y le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le membre choisi adhère à la section tennis » avec une probabilité $p = \frac{3}{10}$ ou « le membre choisi n'adhère pas à la section tennis » avec une probabilité $1 - p = \frac{7}{10}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{3}{10}$.

La probabilité demandée est $p(Y = 2)$ et on sait que

$$p(Y = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{3^2 \times 7^2}{10^4} = \frac{2646}{10^4} = 0,2646.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remplace 4 par n et on obtient pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$p(Y = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{n-k}.$$

Par suite,

$$p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{3}{10}\right)^n \left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geq 100 \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{10}{7}\right) \Leftrightarrow \ln(100) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \Leftrightarrow \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{10}{7}\right)} \Leftrightarrow n \geq 12,9\dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 13 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$ est 13.

2) La variable aléatoire X prend trois valeurs : $35 = 40 - 5$ quand le joueur tire deux jetons gagnants, $15 = 20 - 5$ quand le joueur tire un jeton gagnant et -5 quand le joueur ne tire aucun jeton gagnant.

- La probabilité de tirer deux jetons gagnants est $\frac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{10 \times 9}{2}}{\frac{100 \times 99}{2}} = \frac{10 \times 9}{10 \times 10 \times 9 \times 11} = \frac{1}{110}$.
- La probabilité de tirer un jeton gagnant est $\frac{\binom{10}{1} \times \binom{90}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{10 \times 90}{\frac{100 \times 99}{2}} = \frac{20}{110}$.
- La probabilité de ne tirer aucun jeton gagnant est $\frac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{90 \times 89}{2}}{\frac{100 \times 99}{2}} = \frac{90 \times 89}{100 \times 99} = \frac{89}{110}$.

Donnons la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	35	15	-5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{110}$	$\frac{20}{110}$	$\frac{89}{110}$

b) L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = 35 \times \frac{1}{110} + 15 \times \frac{20}{110} - 5 \times \frac{89}{110} = \frac{35 + 300 - 445}{110} = -1.$$

Le gain algébrique moyen à cette loterie est -1 € ou encore en moyenne, le joueur perd 1 euro par partie jouée. Le gain algébrique est strictement négatif et donc le jeu est défavorable au joueur.