EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle anti-dopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?

2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :

- « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1; 50]$
- l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a :=$ rand$(1, 50)$; $b :=$ rand$(1, 50)$; $c :=$ rand$(1, 50)$; $d :=$ rand$(1, 50)$; $e :=$ rand$(1, 50)$ Fin du tant que
Sortie	Afficher $a, b, c\ d, e$

(a) Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
$L_1 = \{2, 11, 44, 2, 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
$L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

(b) Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $0, 1$.

4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

(a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

(b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants :

- il a été contrôlé 5 fois exactement ;
- il n'a pas été contrôlé ;
- il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'événement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.
On appelle D l'événement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100%, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97% des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1% des cas.

1. Calculer $p(D)$.

2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?