BACCALAUREAT GENERAL

Session d'avril 2012
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Pondichéry

EXERCICE 1

Partie A

1) Le nombre de groupes différents de 5 coureurs est encore le nombre de tirages simultanés de 5 numéros de dossards parmi 50 numéros. Ce nombre est

$$\binom{50}{5} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 49 \times 2 \times 47 \times 46 = 2\ 118\ 760.$$

2) (a) L'algorithme démarre avec 5 nombres égaux à 0 puis, tant que les 5 nombres ne sont pas deux à deux distincts, il génère 5 nombres au hasard entre 1 et 50. L'algorithme s'arrête quand les 5 nombres générés sont deux à deux distincts. Par suite, l'algorithme peut fournir les ensembles L_2 et L_4 mais pas les ensembles L_1 et L_3.

(b) L'algorithme permet de tirer au sort 5 coureurs parmi les 50 pour subir un contrôle anti-dopage.

3) Il y a 50 choix possibles de 1 coureur parmi 50 et 5 choix de 1 coureur parmi les 5 qui subissent un contrôle. La probabilité qu'un coureur subisse un contrôle est donc

$$p = \frac{5}{50} = 0,1.$$

4) (a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le coureur subit un contrôle » avec une probabilité $p = 0,1$ ou « le coureur ne subit pas de contrôle » avec une probabilité $1 - p = 0,9$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k}(0,1)^k(0,9)^{10-k}.$$

(b) • $p(X = 5) = \binom{10}{5}(0,1)^5(0,9)^5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}(0,09)^5 = 3 \times 2 \times 7 \times 6 \times (0,09)^5 = 0,0015$ arrondie au dix millième.

La probabilité que le coureur soit contrôlé 5 fois exactement est $0,0015$ arrondie au dix millième.

• $p(X = 0) = \binom{10}{0}(0,1)^0(0,9)^{10} = (0,9)^{10} = 0,3487$ arrondie au dix millième.

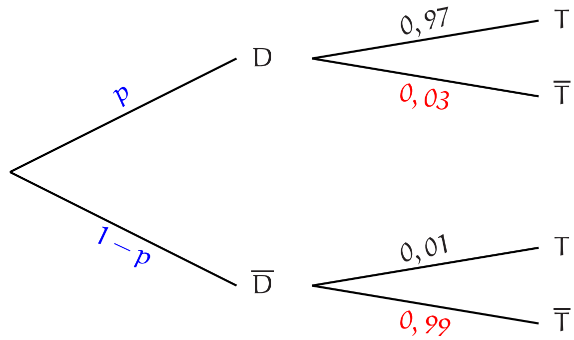
La probabilité que le coureur ne soit pas contrôlé est $0,3487$ arrondie au dix millième.

• $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (0,9)^{10} = 0,6513$ arrondie au dix millième.

La probabilité que le coureur soit contrôlé au moins une fois est $0,6513$ arrondie au dix millième.

Partie B

1) L'énoncé fournit $p(T) = 0,05$, $p_D(T) = 0,97$ et $p_{\overline{D}}(T) = 0,01$. Posons $p(D) = p$. Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p\left(D \cap T\right) + p\left(\overline{D} \cap T\right) = p(D) \times p_D(T) + p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(T),$$

et donc $0,97p + 0,01(1-p) = 0,05$ puis $0,96p = 0,04$ et finalement

$$p(D) = \frac{0,04}{0,96} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}.$$

$$\boxed{p(D) = \frac{1}{24}.}$$

2) La probabilité demandée est $p_T\left(\overline{D}\right)$.

$$p_T\left(\overline{D}\right) = \frac{p(T \cap \overline{D})}{p(T)} = \frac{p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(T)}{p(T)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{24}\right) \times \frac{1}{100}}{\frac{5}{100}} = \frac{23}{24} \times \frac{1}{100} \times \frac{100}{5} = \frac{23}{120}.$$

$$\boxed{p_T\left(\overline{D}\right) = \frac{23}{120}.}$$

