EXERCICE 4 (5 points)

(Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0; 80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40% ont leurs faces marquées d'un cercle, 20% ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20% ont leurs faces marquées d'un cercle, $x\%$ ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12+0,004x$.

2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3. Déterminer x pour que les événements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.

4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne. Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?

2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?

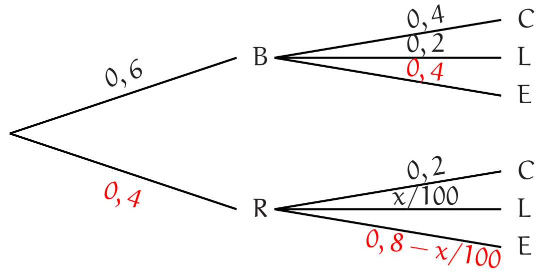
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

EXERCICE 4

Partie A : expérience 1

1) Notons B l'événement « le cube tiré est bleu », R l'événement « le cube tiré est rouge », C l'événement « le cube tiré est marqué d'un cercle », L l'événement « le cube tiré est marqué d'un losange », E l'événement « le cube tiré est marqué d'une étoile ».

Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p(L)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(L) = p(B) \times p_B(L) + p(R) \times p_R(L) = 0,6 \times 0,2 + (1 - 0,6) \times \frac{x}{100} = 0,12 + 0,004x.$$

2) De même,

$$p(E) = p(B)\times p_B(E)+p(R)\times p_R(E) = 0,6\times(1-0,4-0,2)+0,4\times(1-0,2-0,01x) = 0,24+0,4(0,8-0,01x) = 0,56-0,004x,$$

puis

$$p(L) = p(E) \Leftrightarrow 0,12 + 0,004x = 0,56 - 0,004x \Leftrightarrow 0,008x = 0,44 \Leftrightarrow x = \frac{0,44}{0,008} \Leftrightarrow x = 55.$$

3) Les événements B et L sont indépendants si et seulement si $p_B(L) = p(L)$. Or,

$$p(L) = p_B(L) \Leftrightarrow 0,12 + 0,004x = 0,2 \Leftrightarrow 0,004x = 0,08 \Leftrightarrow x = \frac{0,08}{0,004} \Leftrightarrow x = 20.$$

4) Ici, $x = 50$. La probabilité demandée est $p_L(B)$.

$$p_L(B) = \frac{p(B \cap L)}{p(L)} = \frac{p(B) \times p_B(L)}{p(L)} = \frac{0,6 \times 0,2}{0,12 + 0,004 \times 50}\frac{0,12}{0,32} = 0,375.$$

Partie B : expérience 2

1) L'événement considéré est l'événement contraire de l'événement « les trois cubes tirés sont bleus ».
Le nombre de tirages simultanés de 3 cubes parmi les 100 que contient l'urne est

$$\binom{100}{3} = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2} = 100 \times 33 \times 49 = 161700.$$

Le nombre de tirages simultanés de 3 cubes parmi les 60 bleus est

$$\binom{60}{3} = \frac{60 \times 59 \times 58}{3 \times 2} = 10 \times 59 \times 58 = 34220.$$

La probabilité demandée est donc

$$1 - \frac{34220}{161700} = \frac{12748}{16170} = 0,788 \text{ arrondi au millième.}$$

2) La probabilité d'obtenir trois cubes bleus est $\dfrac{34220}{161700}$. De même, la probabilité d'obtenir trois cubes rouges est

$$\frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\dfrac{40 \times 39 \times 38}{3 \times 2}}{161700} = \frac{9880}{161700}.$$

La probabilité d'obtenir trois cubes de même couleur est donc

$$\frac{34220}{161700} + \frac{9880}{161700} = \frac{44100}{161700} = 0,273 \text{ arrondi au millième.}$$

3) Le nombre de cubes bleus marqués d'un cercle est $0,4 \times 60 = 24$ et le nombre de cubes rouges marqués d'un cercle est $0,2 \times 40 = 8$. Le nombre total de cubes marqués d'un cercle est 32.

Le nombre de tirages simultanés de 3 cubes dont 1 est l'un des 32 cubes marqués d'un cercle et les deux autres sont deux des 68 cubes non marqués d'un cercle est

$$\binom{32}{1} \times \binom{68}{2} = 32 \times \frac{68 \times 67}{2} = 72896.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{72896}{161700} = 0,451 \text{ arrondi au millième.}$$

