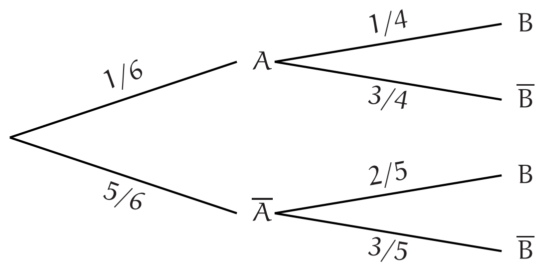
EXERCICE 2

1) a) Représentons la situation par un arbre.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

$$\boxed{p(B) = \frac{3}{8}.}$$

c) La probabilité demandée est $p_B(A)$.

$$p_B(A) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{p(A) \times p_A(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{9}.$$

$$\boxed{p_B(A) = \frac{1}{9}.}$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule obtenue est noire » avec une probabilité $p = \frac{3}{8}$ (d'après la question 1)b))

ou « la boule obtenue n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{10-k}.$$

En particulier,

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{5}{8}\right)^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times \frac{3^3 \times 5^7}{8^{10}} = 120 \times \frac{3^3 \times 5^7}{8^{10}} = 0,2357\ldots$$

et donc

$$\boxed{\text{la probabilité de gagner exactement } 3 \text{ parties est } 0,236 \text{ arrondie au millième.}}$$

b) La probabilité demandée est $p\,(X \geqslant 1)$.

$$p\,(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{3}{8}\right)^0 \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 0,9909\ldots$$

et donc

$$\boxed{\text{la probabilité de gagner au moins } 1 \text{ partie est } 0,991 \text{ arrondie au millième.}}$$

c) La probabilité considérée est $p(X \geqslant N)$.

$$p(X \geqslant N) \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow 1 - p(X < N) \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow p(X > N) \geqslant \frac{9}{10}.$$

D'après le tableau fourni dans l'énoncé, la valeur de N à partir de laquelle la probabilité de l'événement « la personne gagne au moins N parties » devient inférieure à $\frac{1}{10}$ est 7.

