EXERCICE 3

1) Quand l'événement J_1 est réalisé, on doit tirer une boule de l'urne U_2. Puisque l'urne U_2 contient 10 boules dont 4, sont blanches,

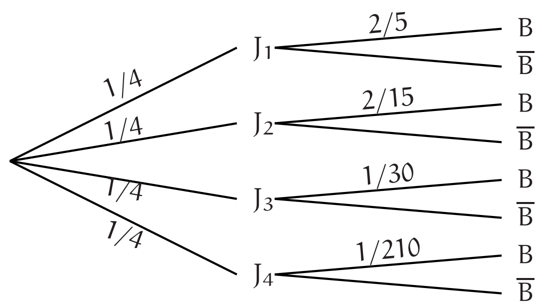
$$p_{J_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Quand l'événement J_2 est réalisé, on doit tirer deux boules de l'urne U_2. Il y a $\binom{10}{2}$ tirages simultanés de 2 boules parmi les 10 de l'urne U_2 et parmi ces tirages, il y a $\binom{4}{2}$ tirages simultanés de deux boules parmi les 4 blanches. Donc

$$p_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4\times 3}{2}}{\frac{10\times 9}{2}} = \frac{4\times 3}{10\times 9} = \frac{2}{5\times 3} = \frac{2}{15}.$$

$$\boxed{p_{J_1}(B) = \frac{2}{5},\ p_{J_2}(B) = \frac{2}{15},\ p_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \text{ et } p_{J_4}(B) = \frac{1}{210}.}$$

2) Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(B) &= p(J_1)\times p_{J_1}(B) + p(J_2)\times p_{J_2}(B) + p(J_3)\times p_{J_3}(B) + p(J_4)\times p_{J_4}(B) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{210}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{84+28+7+1}{210} = \frac{120}{4\times 210}\frac{4\times 30}{4\times 30\times 7} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(B) = \frac{1}{7}.}$$

3) La probabilité demandée est $p_B(J_3)$.

$$p_B(J_3) = \frac{p(J_3\cap B)}{p(B)} = \frac{p(J_3)\times p_{J_3}(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{30}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}.$$

$$\boxed{p_B(J_3) = \frac{7}{120}.}$$

4) a) La variable aléatoire N est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « toutes les boules tirées sont blanches » avec une probabilité $p = \frac{1}{7}$ (d'après la question 2)) ou « au moins une boule tirée n'est pas blanche » avec une probabilité $1 - p = \frac{6}{7}$.

La variable aléatoire N suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{7}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{7}\right)^k \left(\frac{6}{7}\right)^{10-k}.$$

b) D'après la question précédente,

$$p(N = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{7}\right)^3 \left(\frac{6}{7}\right)^7 = 0,118\ldots,$$

et donc

$$\boxed{p(N = 3) = 0,12 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

