

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 , à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les événements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question 4.b) où une valeur arrondie à 10^{-2} suffit.

1. Calculer $p_{J_1}(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement J_1 est réalisé. Calculer de même la probabilité $p_{J_2}(B)$.

On admet dans la suite les résultats suivants :

$$p_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad p_{J_4}(B) = \frac{1}{210}.$$

2. Montrer que $p(B)$, probabilité de l'événement B , vaut $\frac{1}{7}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?
4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de parties où toutes les boules tirées sont blanches.
- a) Quelle est la probabilité suivie par la variable aléatoire N ?
- b) Calculer la probabilité de l'événement ($N = 3$).

EXERCICE 3

1) Quand l'événement J_1 est réalisé, on doit tirer une boule de l'urne U_2 . Puisque l'urne U_2 contient 10 boules dont 4, sont blanches,

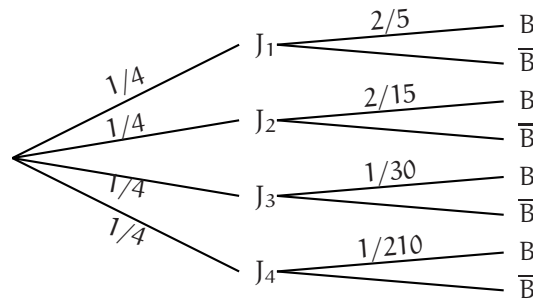
$$p_{J_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Quand l'événement J_2 est réalisé, on doit tirer deux boules de l'urne U_2 . Il y a $\binom{10}{2}$ tirages simultanés de 2 boules parmi les 10 de l'urne U_2 et parmi ces tirages, il y a $\binom{4}{2}$ tirages simultanés de deux boules parmi les 4 blanches. Donc

$$p_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{\frac{10 \times 9}{2}} = \frac{4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}.$$

$$p_{J_1}(B) = \frac{2}{5}, p_{J_2}(B) = \frac{2}{15}, p_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \text{ et } p_{J_4}(B) = \frac{1}{210}.$$

2) Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(B) &= p(J_1) \times p_{J_1}(B) + p(J_2) \times p_{J_2}(B) + p(J_3) \times p_{J_3}(B) + p(J_4) \times p_{J_4}(B) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{210} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{84 + 28 + 7 + 1}{210} = \frac{120}{4 \times 210} = \frac{4 \times 30}{4 \times 210 \times 7} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

$$p(B) = \frac{1}{7}.$$

3) La probabilité demandée est $p_B(J_3)$.

$$p_B(J_3) = \frac{p(J_3 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(J_3) \times p_{J_3}(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{30}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}.$$

$$p_B(J_3) = \frac{7}{120}.$$

4) a) La variable aléatoire N est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « toutes les boules tirées sont blanches » avec une probabilité $p = \frac{1}{7}$ (d'après la question 2)) ou « au moins une boule tirée n'est pas blanche » avec une probabilité $1 - p = \frac{6}{7}$.

La variable aléatoire N suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{7}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{7}\right)^k \left(\frac{6}{7}\right)^{10-k}.$$

b) D'après la question précédente,

$$p(N = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{7}\right)^3 \left(\frac{6}{7}\right)^7 = 0,118\dots,$$

et donc

$$p(N = 3) = 0,12 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$