

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes. Démontrer que $p = 0,42$.
2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
 - a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p .
 - b. Exprimer p_n en fonction de n , puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
 - c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1.
 - a. Justifier l'égalité : $p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.
 - b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k .
2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k . On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.