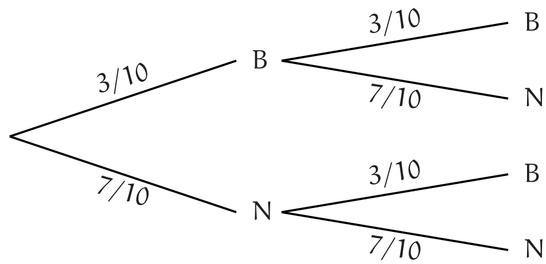
EXERCICE 3

Partie A

1) On note N l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est noire » et B l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est blanche ». Représentons la situation par un arbre :



La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$p = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = 0,42.$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

• n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
• chaque expérience a deux issues : « le candida t gagne la partie » avec une probabilité $p = 0,42$ (d'après la question précédente) ou « le candidat perd la partie » avec une probabilité $1 - p = 0,58$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.

b) $p_n = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,42)^0(0,58)^n = 1 - (0,58)^n$.

En particulier, $p_{10} = 1 - (0,58)^{10} = 0,996$ arrondie au millième.

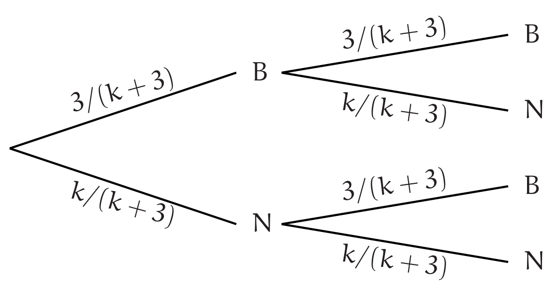
c)

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,58)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow (0,58)^n \leqslant 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,58)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \ln(0,58) \leqslant \ln(0,01) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \Leftrightarrow n \geqslant 8,4\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 9 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le joueur doit jouer un nombre minimal de 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

1) a) L'événement $Y_k = 5$ est l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes. Représentons la situation par un arbre :



$p(Y_k = 5)$ qui est encore la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$p(Y_k = 5) = \frac{k}{(k+3)} \times \frac{3}{k+3} + \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{6k}{(k+3)^2}.$$

b) De même, $p\left(Y_k = -9\right) = \dfrac{3}{k+3} \times \dfrac{3}{k+3} = \dfrac{9}{(k+3)^2}$ et $p\left(Y_k = -1\right) = \dfrac{k}{k+3} \times \dfrac{k}{k+3} = \dfrac{k^2}{(k+3)^2}$. Donnons alors la loi de probabilité de Y_k dans un tableau :

y_i	-9	-1	5
$p(Y_k = y_i)$	$9/(k+3)^2$	$k^2/(k+3)^2$	$6k/(k+3)^2$

2) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$E\left(Y_k\right) = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} - 1 \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} = \frac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2},$$

puis

$$\begin{aligned} E\left(Y_k\right) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2} > 0 \Leftrightarrow -k^2+30k-81 > 0 \text{ (car } (k+3)^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow k^2 - 30k + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 - 15^2 + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 < 144 \\ &\Leftrightarrow -12 < k - 15 < 12 \Leftrightarrow 3 < k < 27 \Leftrightarrow 4 \leqslant k \leqslant 26. \end{aligned}$$

Les valeurs de k pour lesquelles le jeu est favorable au joueur sont 4, 5, 6, ..., 24, 25 et 26.

