

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes. Démontrer que $p = 0,42$.
2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
 - a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p .
 - b. Exprimer p_n en fonction de n , puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
 - c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

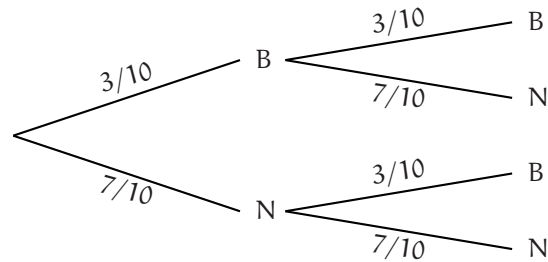
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1.
 - a. Justifier l'égalité : $p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.
 - b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k .
2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k . On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

EXERCICE 3

Partie A

1) On note N l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est noire » et B l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est blanche ». Représentons la situation par un arbre :



La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$p = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = 0,42.$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le candidat gagne la partie » avec une probabilité $p = 0,42$ (d'après la question précédente) ou « le candidat perd la partie » avec une probabilité $1 - p = 0,58$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.

b) $p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} (0,42)^0 (0,58)^n = 1 - (0,58)^n.$

En particulier, $p_{10} = 1 - (0,58)^{10} = 0,996$ arrondie au millième.

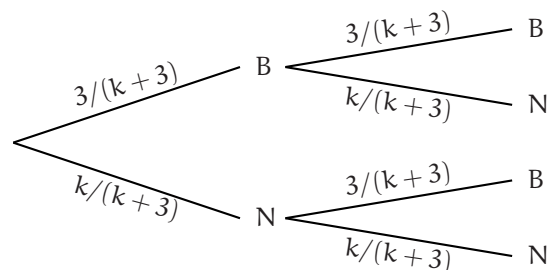
c)

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,58)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow (0,58)^n \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \ln((0,58)^n) \leq \ln(0,01) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,58) \leq \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \Leftrightarrow n \geq 8,4\dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 9 \quad (\text{car } n \text{ est un entier}). \end{aligned}$$

Le joueur doit jouer un nombre minimal de 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

1) a) L'événement $Y_k = 5$ est l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes. Représentons la situation par un arbre :



$p(Y_k = 5)$ qui est encore la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$p(Y_k = 5) = \frac{k}{(k+3)} \times \frac{3}{k+3} + \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{6k}{(k+3)^2}.$$

b) De même, $p(Y_k = -9) = \frac{3}{k+3} \times \frac{3}{k+3} = \frac{9}{(k+3)^2}$ et $p(Y_k = -1) = \frac{k}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{k^2}{(k+3)^2}$. Donnons alors la loi de probabilité de Y_k dans un tableau :

y_i	-9	-1	5
$p(Y_k = y_i)$	$9/(k+3)^2$	$k^2/(k+3)^2$	$6k/(k+3)^2$

2) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$E(Y_k) = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} - 1 \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} = \frac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2},$$

puis

$$\begin{aligned} E(Y_k) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2} > 0 \Leftrightarrow -k^2 + 30k - 81 > 0 \text{ (car } (k+3)^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow k^2 - 30k + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 - 15^2 + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 < 144 \\ &\Leftrightarrow -12 < k-15 < 12 \Leftrightarrow 3 < k < 27 \Leftrightarrow 4 \leq k \leq 26. \end{aligned}$$

Les valeurs de k pour lesquelles le jeu est favorable au joueur sont 4, 5, 6, ..., 24, 25 et 26.