

EXERCICE 2

Partie A

Il y a $\binom{25}{2}$ choix de deux ordinateurs parmi 25 et $\binom{3}{2}$ choix de deux ordinateurs parmi les trois défectueux. La probabilité demandée est donc

$$p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{\frac{3 \times 2}{2}}{\frac{25 \times 24}{2}} = \frac{3 \times 2}{25 \times 24} = \frac{1}{25 \times 4} = \frac{1}{100}.$$

Partie B

1) Soit t un réel positif.

$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ puis $p(X > t) = 1 - p(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$. Par suite

$$p(X > 5) = 0,4 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,4 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow 5\lambda = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

avec $\frac{1}{5} \ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0,18$ à 10^{-2} près.

$$2) p_{X>3}(X > 5) = \frac{p((X > 5) \cap (X > 3))}{p(X > 3)} = \frac{p(X > 5)}{p(X > 3)} = \frac{e^{-5 \times 0,18}}{e^{-3 \times 0,18}} = \frac{e^{-0,9}}{e^{-0,54}} = e^{-0,36} = 0,698 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

3) a) Notons X le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie est supérieure à 5 ans. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'ordinateur a une durée de vie supérieure à 5 ans » avec une probabilité $p = 0,4$ ou « l'ordinateur a une durée de vie inférieure à 5 ans » avec une probabilité $1 - p = 0,6$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 1)$. Or

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} (0,4)^0 (0,6)^{10} = 1 - 0,6^{10} = 0,994 \text{ arrondi au millième.}$$

b) Dans cette question n est un entier naturel non nul quelconque et $p(X \geq 1) = 1 - 0,6^n$. Puis

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) \geq 0,999 &\Leftrightarrow 1 - 0,6^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,001 \geq 0,6^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,001) \geq \ln(0,6^n) \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,6) \leq \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \text{ (car } \ln(0,6) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 13,5 \dots \Leftrightarrow n \geq 14 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal d'ordinateurs que l'on doit choisir pour que la probabilité que l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans soit supérieure à 0,999 est 14.