EXERCICE 2 (4 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.
2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.
   Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?
3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.
   a) On considère un lot de 10 ordinateurs.
   Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.
   b) Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 2

Partie A

Il y a $\binom{25}{2}$ choix de deux ordinateurs parmi 25 et $\binom{3}{2}$ choix de deux ordinateurs parmi les trois défectueux. La probabilité demandée est donc

$$p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{\frac{3\times 2}{2}}{\frac{25\times 24}{2}} = \frac{3\times 2}{25\times 24} = \frac{1}{25\times 4} = \frac{1}{100}.$$

Partie B

1) Soit t un réel positif.
$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ puis $p(X > t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$. Par suite

$$p(X > 5) = 0,4 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,4 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow 5\lambda = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

avec $\frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0,18$ à 10^{-2} près.

2) $p_{X>3}(X > 5) = \frac{p((X > 5)\cap(X > 3))}{p(X > 3)} = \frac{p(X > 5)}{p(X > 3)} = \frac{e^{-5\times 0,18}}{e^{-3\times 0,18}} = \frac{e^{-0,9}}{e^{-0,54}} = e^{-0,36} = 0,698$ à 10^{-3} près.

3) a) Notons X le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie est supérieure à 5 ans. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'ordinateur a une durée de vie supérieure à 5 ans » avec une probabilité $p = 0,4$ ou « l'ordinateur a une durée de vie inférieure à 5 ans » avec une probabilité $1 - p = 0,6$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$. Or

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}(0,4)^0(0,6)^{10} = 1 - 0,6^{10} = 0,994 \text{ arrondi au millième.}$$

b) Dans cette question n est un entier naturel non nul quelconque et $p(X \geqslant 1) = 1 - 0,6^n$. Puis

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 1) \geqslant 0,999 &\Leftrightarrow 1 - 0,6^n \geqslant 0,999 \Leftrightarrow 0,001 \geqslant 0,6^n \\
&\Leftrightarrow \ln(0,001) \geqslant \ln(0,6^n) \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,6) \leqslant \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \text{ (car } \ln(0,6) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 13,5\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 14 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le nombre minimal d'ordinateurs que l'on doit choisir pour que la probabilité que l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans soit supérieure à $0,999$ est 14.