EXERCICE 2 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté.
Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V, sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo ;
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, il effectuera le trajet en roller ;
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied ;
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70% des cas, il choisit le roller dans 20% des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10% des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.

Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

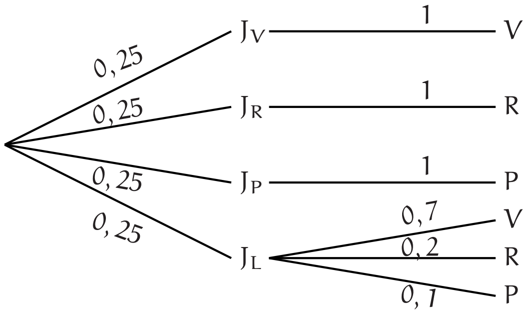
2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.

3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?

4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.
L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.
Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

EXERCICE 2

1) Représentons la situation par un arbre. On note J_V (respectivement J_R, J_P, J_L) l'événement « le concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre V (respectivement R, P, L) ». On note aussi V (respectivement R, P) l'événement « le concurrent effectue le parcours en vélo (respectivement en roller, à pied) ».



2) La probabilité demandée est $p(V)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p(V) &= p(J_V \cap V) + p(J_R \cap V) + p(J_P \cap V) + p(J_L \cap V)\\ &= p(J_V) \times p_{J_V}(V) + p(J_R) \times p_{J_R}(V) + p(J_P) \times p_{J_P}(V) + p(J_L) \times p_{J_L}(V)\\ &= 0,25 \times 1 + 0,25 \times 0 + 0,25 \times 0 + 0,25 \times 0,7 = 0,25 + 0,25 \times 0,7 = 0,425.\end{aligned}$$

La probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo est $0,425$.

3) La probabilité demandée est $p_V(J_L)$.

$$p_V(J_L) = \frac{p(V \cap J_L)}{p(V)} = \frac{p(J_L) \times p_{J_L}(V)}{p(V)} = \frac{0,25 \times 0,7}{0,425} = \frac{0,175}{0,425} = \frac{175}{425} = \frac{7}{17}.$$

La probabilité qu'un concurrent tire le jeton L sachant qu'il effectue le trajet à vélo est $\frac{7}{17}$.

4) On note X le nombre de fois que le vainqueur est un « non cycliste ». Cette variable aléatoire suit un schéma de Bernoulli. En effet, on recommence 6 fois la même expérience de manière indépendante et à chaque expérience, on a deux éventualités « le vainqueur est un non cycliste » avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$ et « le vainqueur est un cycliste » avec une probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$.

La probabilité qu'au moins une fois le vainqueur soit un non cycliste est

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

La probabilité qu'au moins une fois le vainqueur soit un non cycliste est $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0,91$ à 10^{-2} près.