Exercice 2 (3 points)

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, 0 sinon.

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc. D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70% des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60% ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20% des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche. On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

   a) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

   Réponse A : $\frac{3}{5}$ **Réponse B** : $\frac{4}{5}$ **Réponse C** : $\frac{3}{50}$ **Réponse D** : $\frac{6}{25}$

   b) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

   Réponse A : $\frac{21}{50}$ **Réponse B** : $\frac{33}{50}$ **Réponse C** : $\frac{3}{5}$ **Réponse D** : $\frac{12}{25}$

   c) Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

   Réponse A : $\frac{4}{11}$ **Réponse B** : $\frac{6}{25}$ **Réponse C** : $\frac{7}{11}$ **Réponse D** : $\frac{33}{50}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.
   Les boules sont indiscernables au toucher.
   L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

   a) La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

   Réponse A : $\frac{11}{81}$ **Réponse B** : $\frac{2}{7}$ **Réponse C** : $\frac{5}{84}$ **Réponse D** : $\frac{4}{63}$

   b) La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

   Réponse A : $\frac{2}{7}$ **Réponse B** : $\frac{1}{7}$ **Réponse C** : $\frac{1}{21}$ **Réponse D** : $\frac{79}{84}$

   c) On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.
   Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'événement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

   Réponse A : 76 **Réponse B** : 71 **Réponse C** : 95 **Réponse D** : 94

EXERCICE 2

1.a)	**Réponse D**
1.b)	**Réponse B**
1.c)	**Réponse A**
2.a)	**Réponse C**
2.b)	**Réponse A**
2.c)	**Réponse C**

Explication 1.a) On note N (respectivement B) l'événement « l'ordinateur choisi est noir (respectivement blanc) » et M_1 (respectivement M_2) l'événement « l'ordinateur choisi est de la marque M_1 (respectivement M_2) ». La probabilité demandée est $p(M_2 \cap N)$.

L'énoncé donne $p\left(\overline{M_2}\right) = p(M_1) = 0,7$ et donc $p(M_2) = 0,3$. L'énoncé donne aussi $p_{M_2}\left(\overline{N}\right) = p_{M_2}(B) = 0,2$ et donc $p_{M_2}(N) = 0,8$. La probabilité demandée est $p(M_2 \cap N)$ et on a

$$p(M_2 \cap N) = p(M_2) \times p_{M_2}(N) = 0,3 \times 0,8 = 0,24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

.

La bonne réponse est la réponse D.

Explication 1.b) La probabilité demandée est $p(N)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$\begin{aligned} p(N) &= p(N \cap M_1) + p(N \cap M_2) = p(M_1) \times p_{M_1}(N) + p(M_2) \times p_{M_2}(N) = 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,8 = 0,42 + 0,24 \\ &= 0,66 = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}. \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse B.

Explication 1.c) La probabilité demandée est $p_N(M_2)$.

$$p_N(M_2) = \frac{p(M_2 \cap N)}{p(N)} = \frac{6/25}{33/50} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}.$$

La bonne réponse est la réponse A.

Explication 2.a) Le nombre de tirages simultanés de trois boules parmi les neuf boules de l'urne est

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84.$$

Les trois boules tirées sont de même couleur si et seulement si les trois boules sont jaunes ou les trois boules sont bleues. Il y a $\binom{4}{3} = 4$ tirages simultanés de trois boules parmi les quatre jaunes et $\binom{3}{3} = 1$ tirage simultané de trois boules parmi les trois bleues. Le nombre de tirages simultanés de trois boules de même couleur est donc $4 + 1 = 5$ puis la probabilité demandée est $\frac{5}{84}$. La bonne réponse est la réponse C.

Explication 2.b) Le nombre de tirages simultanés fournissant trois couleurs différentes est

$$\binom{4}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} = 4 \times 2 \times 3 = 24.$$

La probabilité d'obtenir trois boules de couleurs différentes est donc $\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$.
La bonne réponse est la réponse A.

Explication 2.c) On note n le nombre de fois que l'on répète l'expérience et X le nombre de fois que l'on obtient 3 boules jaunes. Cette expérience suit un schéma de Bernoulli. En effet, on recommence n fois la même expérience de manière indépendante et à chaque expérience, on a deux éventualités « obtenir trois boules jaunes » avec une probabilité $p = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$ et « ne pas obtenir trois boules jaunes » avec une probabilité $1 - p = \frac{20}{21}$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois trois boules jaunes en n essais est

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{20}{21}\right)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{21}{20}\right)^n \geqslant 100 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{21}{20}\right)^n\right) \geqslant \ln(100) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{21}{20}\right) \geqslant \ln(100) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(100)}{\ln(21/20)} \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 94,3\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 95.
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse C.