EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. **a.** Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif .

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

France métropolitaine

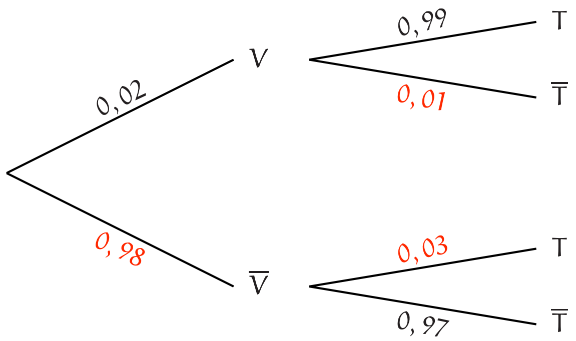
EXERCICE 1

PARTIE A

1) a) L'énoncé fournit directement

$$\boxed{p(V) = 0,02,\ p_V(T) = 0,99 \text{ et } p_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0,97.}$$

Représentons la situation par un arbre.



b) On en déduit que $p\,(V \cap T) = p(V) \times p_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$.

$$\boxed{p\,(V \cap T) = 0,0198.}$$

2) La probabilité demandée est $p(T)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(T) = p(T \cap V) + p(T \cap \overline{V})$. D'après la question précédente, $p\,(V \cap T) = 0,0198$ et d'autre part

$$p(T \cap \overline{V}) = p(\overline{V}) \times p_{\overline{V}}(T) = (1 - p(V))(1 - p_{\overline{V}}(\overline{T})) = (1 - 0,02)(1 - 0,97) = 0,98 \times 0,03 = 0,0294,$$

et donc $p(T) = 0,0198 + 0,0294 = 0,0492$.

$$\boxed{p\,(T) = 0,0492.}$$

3) a) La probabilité demandée est $p_T(V)$. Or,

$$p_T(V) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} = 0,402\ldots$$

Donc $p_T(V) = 40,2\ldots\%$ ou encore $p_T(V) = 40\%$ à 1% près ce qui justifie la phrase de l'énoncé.

b) La probabilité demandée est $p_{\overline{T}}(\overline{V})$. Or,

$$p_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{p(\overline{V} \cap \overline{T})}{p(\overline{T})}.$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, $p(\overline{T}) = p(\overline{V} \cap T) + p(\overline{V} \cap \overline{T})$ et donc, d'après le calcul de la question 2),

$$p(\overline{V} \cap \overline{T}) = p(\overline{T}) - p(\overline{V} \cap T) = (1 - 0,0492) - 0,0294 = 0,9214$$

puis $p_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{0,9214}{1-0,0492} = 0,9691$ arrondi à 10^{-4}.

$$\boxed{p_{\overline{T}}(\overline{V}) = 0,9691 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

PARTIE B

1) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne est contaminée par le virus » avec une probabilité $p = 0,02$ ou « la personne n'est pas contaminée par le virus » avec une probabilité $1 - p = 0,98$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,02$.

2) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 2)$. Or,

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 2) &= 1 - p(X=0) - p(X=1) = 1 - \binom{10}{0} \times 0,02^0 \times 0,98^{10} - \binom{10}{1} \times 0,02^1 \times 0,98^9 \\ &= 1 - 0,98^{10} - 10 \times 0,02 \times 0,98^9 = 0,0162 \text{ arrondi à } 10^{-4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'au moins deux personnes soient contaminées est } 0,0162 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$