EXERCICE 4

1) Restitution organisée de connaissances

Soient s et t deux réels positifs. Vérifions tout d'abord que $p([t,+\infty[) \neq 0$.

$$p([t,+\infty[) = 1 - p([0,t[) = 1 - p([0,t]) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

On a montré au passage que $F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda t}$. Ensuite, comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $p([t,+\infty[) \neq 0$ puis

$$\begin{aligned}
p_{[t,+\infty[}([t,t+s]) &= \frac{p((t \leqslant X \leqslant t+s) \cap (X \geqslant t))}{p(X \geqslant t)} = \frac{p(t \leqslant X \leqslant t+s)}{1 - p(X < t)} = \frac{p(t \leqslant X \leqslant t+s)}{1 - p(X \leqslant t)} \text{ (car } p(X=t)=0\text{)}\\
&= \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{\left(1 - e^{-\lambda(t+s)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} - \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}\\
&= 1 - e^{-\lambda t - \lambda s + \lambda t} = 1 - e^{-\lambda s} = F(s).
\end{aligned}$$

En particulier, $p_{[t,+\infty[}([t,t+s])$ est indépendant de t.

2) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 2)$.
D'après la question précédente, pour tout réel positif t, on a $p(X \geqslant t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,2t}$ et donc $p(X \geqslant 2) = e^{-0,4}$.

3) La probabilité demandée est $p_{[2,+\infty[}([6,+\infty[)$.

$$p_{[2,+\infty[}([6,+\infty[) = \frac{p((X \geqslant 2) \cap (X \geqslant 6))}{p(X \geqslant 2)} = \frac{p(X \geqslant 6)}{p(X \geqslant 2)} = \frac{e^{-0,2\times 6}}{e^{-0,2\times 2}} = \frac{e^{-1,2}}{e^{-0,4}} = e^{-0,8} = 0,45 \text{ arrondi au centième.}$$

4) a) Notons Y le nombre de capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $p = e^{-0,4}$ (d'après la question 2)) ou « le capteur tombe en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $1 - p = 1 - e^{-0,4}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = e^{-0,4}$.

La probabilité demandée est $p(Y = 2)$.

$$p(Y=2) = \binom{10}{2} \times (e^{-0,4})^2(1 - e^{-0,4})^8 = \frac{10 \times 9}{2} e^{-0,8}(1 - e^{-0,4})^8 = 45e^{-0,8}(1 - e^{-0,4})^8 = 0,0028217\ldots.$$

Donc $p(Y = 2) = 0,002822$ arrondi à la sixième décimale.

b) La probabilité que tous les capteurs tombent en panne au cours des deux premières années est

$$p(Y=0) = \binom{10}{0}(e^{-0,4})^0(1 - e^{-0,4})^{10} = (1 - e^{-0,4})^{10}$$

et donc la probabilité qu'au moins un appareil ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est

$$p(Y \geqslant 1) = 1 - (1 - e^{-0,4})^{10} = 0,9999848\ldots$$

Donc, $p(Y \geqslant 1) = 0,999985$ arrondi à la sixième décimale.

