EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I :

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.

2) Soit l'événement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ». Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\frac{7}{18}$.

3) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.

4) À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.
Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1) a) Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

   b) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2) Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.

3) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

EXERCICE 2

Partie I

1) A chaque lancer, la probabilité d'obtenir une face noire est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Puisque les lancers sont effectués de manière indépendante, la probabilité d'obtenir deux faces noires c'est-à-dire une face noire à chaque lancer est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir deux faces noires est } \frac{1}{9}.}$$

2) De même, la probabilité d'obtenir deux faces vertes est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ et la probabilité d'obtenir deux faces rouges est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Donc

$$p(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{4+1+9}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

$$\boxed{p(C) = \frac{7}{18}.}$$

3) L'événement « les deux faces obtenues sont de couleurs différentes » est l'événement $\overline{C}$ et $p\left(\overline{C}\right) = 1 - p(C) = \frac{11}{18}$.

$$\boxed{p\left(\overline{C}\right) = \frac{11}{18}.}$$

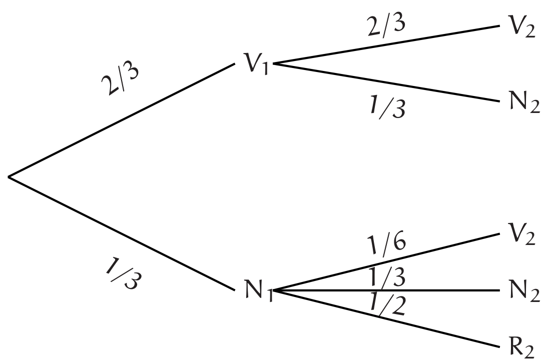
4) Notons V l'événement « les deux faces obtenues sont vertes ». La probabilité demandée est $p_C(V)$. Or

$$p_C(V) = \frac{p(V \cap C)}{p(C)} = \frac{p(V)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{18}} = \frac{18}{7 \times 36} = \frac{1}{7 \times 2} = \frac{1}{14}.$$

$$\boxed{p_C(V) = \frac{1}{14}.}$$

Partie II

1) **a)** On note V_1, V_2, N_1, ..., les probabilités d'obtenir une face verte au premier lancer, au deuxième lancer, une face noire au premier lancer ... Représentons alors la situation par un arbre.



b) Puisqu'on a obtenu une face verte au premier lancer, on a relancé le dé B avec une probabilité $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ d'obtenir une face verte au deuxième lancer.

$$\boxed{p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3}.}$$

2) La probabilité demandée est $p\left(V_1 \cap V_2\right)$. Or

$$p\left(V_1 \cap V_2\right) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

3) La probabilité demandée est $p(V_2)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(V_2) = p(V_1 \cap V_2) + p(N_1 \cap V_2)$. On sait déjà que $p(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{9}$. Ensuite,

$$p(N_1 \cap V_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(V_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Finalement, $p(V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer est $\frac{1}{2}$.

