EXERCICE 3

1. a. $X = -1$ correspond à l'événement « le joueur tire une boule blanche et une boule rouge ». L'urne contient $n + 10$ boules. Il y a donc $(n + 10)(n + 9)$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne.
Ensuite, il y a $10 \times n$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge et il y a $n \times 10$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que la première boule tirée est rouge et la deuxième est blanche. Finalement, il y a $10n + 10n = 20n$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que l'une des deux boules est blanche et l'autre est rouge et donc

$$\boxed{P(X = -1) = \frac{20n}{(n + 10)(n + 9)}.}$$

b. Les deux autres valeurs prises par la variable X sont 4 dans le cas où le joueur tire deux boules rouges et -6 dans le cas où le joueur tire deux boules blanches. Il y a 10×9 tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que les deux boules soient blanches et donc $p(X = 4) = \dfrac{10 \times 9}{(n + 10)(n + 9)}$. De même, il y a $n(n - 1)$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que les deux boules soient rouges et donc $p(X = -6) = \dfrac{n(n - 1)}{(n + 10)(n + 9)}$.

$$\boxed{P(X = -6) = \frac{n(n - 1)}{(n + 10)(n + 9)},\ P(X = -1) = \frac{20n}{(n + 10)(n + 9)} \text{ et } P(X = 4) = \frac{90}{(n + 10)(n + 9)}.}$$

c.

$$\begin{aligned}
E(X) &= (-6) \times p(X = -6) + (-1) \times p(X = -1) + 4 \times p(X = 4) \\
&= -6\frac{n(n - 1)}{(n + 10)(n + 9)} - \frac{20n}{(n + 10)(n + 9)} + 4\frac{90}{(n + 10)(n + 9)} \\
&= \frac{-6n(n - 1) - 20n + 360}{(n + 10)(n + 9)} = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 10)(n + 9)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 10)(n + 9)}.}$$

d.

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 10)(n + 9)} > 0 \Leftrightarrow -6n^2 - 14n + 360 > 0 \Leftrightarrow n^2 + \frac{7}{3}n - 60 < 0$$

Maintenant, le discriminant du trinôme $x^2 + \dfrac{7}{3}x - 60$ est $\Delta = \dfrac{49}{9} + 240 = \dfrac{2209}{9} > 0$. Ce trinôme admet deux racines réelles à savoir $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{7}{3} - \dfrac{\sqrt{2209}}{3}\right) = \dfrac{-7 - 47}{6} = -9 < 0$ et $x_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{2209}}{6} = \dfrac{20}{3} = 6,6\ldots$.
On sait que $x^2 + \dfrac{7}{3}x - 60 < 0 \Leftrightarrow x \in]x_1, x_2[$. Mais alors, puisque n est un entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow n \in]x_1, x_2[\Leftrightarrow n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\boxed{\text{Les valeurs de } n \text{ pour lesquelles } E(X) > 0 \text{ sont 2, 3, 4, 5 et 6.}}$$

2. Notons Y le nombre de boules rouges obtenues sur 20 tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne. Y suit un schéma de BERNOULLI. En effet,

• une même expérience (à savoir tirer une boule de l'urne) à deux éventualités (obtenir une boule rouge ou ne pas obtenir une boule rouge) est effectuée 20 fois de manière indépendante puisque la boule est remise dans l'urne à chaque tirage

• à chaque expérience, la probabilité de tirer une boule rouge est $p = \dfrac{n}{n + 10}$ et la probabilité de ne pas tirer une boule rouge est $1 - p = \dfrac{10}{n + 10}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est $p(Y \geqslant 1)$ avec

$$p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{n}{n+10}\right)^0\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
p(Y \geqslant 1) > 0,999 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} > 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 0,001 \Leftrightarrow \frac{10}{n+10} < \sqrt[20]{0,001} \Leftrightarrow \frac{n+10}{10} > \frac{1}{\sqrt[20]{0,001}} \\
&\Leftrightarrow n + 10 > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} \Leftrightarrow n > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} - 10 \\
&\Leftrightarrow n > 4,1\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 5 \text{ (car } n \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est strictement supérieure à $0,999$ si et seulement si $n \geqslant 5$.

3. **a.** Soit k un entier naturel.

$$p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01e^{-0,01x}\,dx = \left[0,01 \times \frac{e^{-0,01x}}{-0,01}\right]_0^k = \left[-e^{-0,01x}\right]_0^k = -e^{-0,01k} - (-e^0) = 1 - e^{-0,01k}.$$

Pour $k = 50$, on obtient $p(Z \leqslant 50) = 1 - e^{-0,01\times 50} = 1 - e^{-0,5} = 0,39$ arrondi au centième.

b. La probabilité de mandée est $p(Z \leqslant 60)_{Z>50}$. Or

$$\begin{aligned}
p_{Z>50}(Z \leqslant 60) &= \frac{p((Z \geqslant 60) \cap (Z > 50))}{p(Z > 50)} = \frac{p(50 < Z \leqslant 60)}{p(Z > 50)} = \frac{p(Z \leqslant 60) - p(Z \leqslant 50)}{1 - p(Z \leqslant 50)} \\
&= \frac{(1 - e^{-0,6}) - (1 - e^{-0,5})}{1 - (1 - e^{-0,5})} = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{e^{-0,5}} = 1 - e^{-0,1} \\
&= 0,095 \text{ arrondi au millième.}
\end{aligned}$$

