Exercice 3 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.
   a. Démontrer que : $P(X=-1)=\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.
   b. Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.
   c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :
   $$E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}.$$
   d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants.
   Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.
   Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.
   Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :
   $$\text{pour tout } k\in\mathbf{N},\ P(Z\leqslant k)=\int_0^k 0{,}01\,\mathrm{e}^{-0{,}01x}\,\mathrm{d}x.$$

   On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

   a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z\leqslant 50)$.
   b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : "le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche" sachant l'évènement "le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche".

EXERCICE 3

1. a. $X = -1$ correspond à l'événement « le joueur tire une boule blanche et une boule rouge ». L'urne contient $n + 10$ boules. Il y a donc $(n + 10)(n + 9)$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne.
Ensuite, il y a $10 \times n$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge et il y a $n \times 10$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que la première boule tirée est rouge et la deuxième est blanche. Finalement, il y a $10n + 10n = 20n$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que l'une des deux boules est blanche et l'autre est rouge et donc

$$\boxed{P(X = -1) = \frac{20n}{(n + 10)(n + 9)}.}$$

b. Les deux autres valeurs prises par la variable X sont 4 dans le cas où le joueur tire deux boules rouges et -6 dans le cas où le joueur tire deux boules blanches. Il y a 10×9 tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que les deux boules soient blanches et donc $p(X = 4) = \dfrac{10 \times 9}{(n + 10)(n + 9)}$. De même, il y a $n(n - 1)$ tirages successifs sans remise de deux boules de l'urne tels que les deux boules soient rouges et donc $p(X = -6) = \dfrac{n(n - 1)}{(n + 10)(n + 9)}$.

$$\boxed{P(X = -6) = \frac{n(n - 1)}{(n + 10)(n + 9)},\ P(X = -1) = \frac{20n}{(n + 10)(n + 9)} \text{ et } P(X = 4) = \frac{90}{(n + 10)(n + 9)}.}$$

c.

$$\begin{aligned}
E(X) &= (-6) \times p(X = -6) + (-1) \times p(X = -1) + 4 \times p(X = 4) \\
&= -6\frac{n(n - 1)}{(n + 10)(n + 9)} - \frac{20n}{(n + 10)(n + 9)} + 4\frac{90}{(n + 10)(n + 9)} \\
&= \frac{-6n(n - 1) - 20n + 360}{(n + 10)(n + 9)} = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 10)(n + 9)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 10)(n + 9)}.}$$

d.

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 10)(n + 9)} > 0 \Leftrightarrow -6n^2 - 14n + 360 > 0 \Leftrightarrow n^2 + \frac{7}{3}n - 60 < 0$$

Maintenant, le discriminant du trinôme $x^2 + \frac{7}{3}x - 60$ est $\Delta = \frac{49}{9} + 240 = \frac{2209}{9} > 0$. Ce trinôme admet deux racines réelles à savoir $x_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{3} - \frac{\sqrt{2209}}{3}\right) = \frac{-7 - 47}{6} = -9 < 0$ et $x_2 = \frac{-7 + \sqrt{2209}}{6} = \frac{20}{3} = 6,6\ldots$.
On sait que $x^2 + \frac{7}{3}x - 60 < 0 \Leftrightarrow x \in]x_1, x_2[$. Mais alors, puisque n est un entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow n \in]x_1, x_2[\Leftrightarrow n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\boxed{\text{Les valeurs de } n \text{ pour lesquelles } E(X) > 0 \text{ sont 2, 3, 4, 5 et 6.}}$$

2. Notons Y le nombre de boules rouges obtenues sur 20 tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne. Y suit un schéma de Bernoulli. En effet,
• une même expérience (à savoir tirer une boule de l'urne) à deux éventualités (obtenir une boule rouge ou ne pas obtenir une boule rouge) est effectuée 20 fois de manière indépendante puisque la boule est remise dans l'urne à chaque tirage
• à chaque expérience, la probabilité de tirer une boule rouge est $p = \dfrac{n}{n + 10}$ et la probabilité de ne pas tirer une boule rouge est $1 - p = \dfrac{10}{n + 10}$.
La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est $p(Y \geqslant 1)$ avec

$$p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y=0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{n}{n+10}\right)^0\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
p(Y \geqslant 1) > 0,999 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} > 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 0,001 \Leftrightarrow \frac{10}{n+10} < \sqrt[20]{0,001} \Leftrightarrow \frac{n+10}{10} > \frac{1}{\sqrt[20]{0,001}}\\
&\Leftrightarrow n+10 > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} \Leftrightarrow n > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} - 10\\
&\Leftrightarrow n > 4,1\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 5 \text{ (car } n \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est strictement supérieure à $0,999$ si et seulement si $n \geqslant 5$.

3. **a.** Soit k un entier naturel.

$$p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01e^{-0,01x}\,dx = \left[0,01 \times \frac{e^{-0,01x}}{-0,01}\right]_0^k = \left[-e^{-0,01x}\right]_0^k = -e^{-0,01k} - (-e^0) = 1 - e^{-0,01k}.$$

Pour $k = 50$, on obtient $p(Z \leqslant 50) = 1 - e^{-0,01\times 50} = 1 - e^{-0,5} = 0,39$ arrondi au centième.

b. La probabilité de mandée est $p(Z \leqslant 60)_{Z>50}$. Or

$$\begin{aligned}
p_{Z>50}(Z \leqslant 60) &= \frac{p((Z \geqslant 60) \cap (Z > 50))}{p(Z > 50)} = \frac{p(50 < Z \leqslant 60)}{p(Z > 50)} = \frac{p(Z \leqslant 60) - p(Z \leqslant 50)}{1 - p(Z \leqslant 50)}\\
&= \frac{(1 - e^{-0,6}) - (1 - e^{-0,5})}{1 - (1 - e^{-0,5})} = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{e^{-0,5}} = 1 - e^{-0,1}\\
&= 0,095 \text{ arrondi au millième.}
\end{aligned}$$

