

EXERCICE 2

Partie A - Un seul robot

1. Notons p la probabilité que le robot passe par le sommet I. Alors,

$$1 = p(S) + p(I) + p(X) = 2p + p + 2p = 5p,$$

et donc $p = \frac{1}{5}$.

La probabilité qu'un robot passe par le sommet I est $\frac{1}{5}$.

2. Puisque les étapes sont indépendantes les unes des autres, la probabilité que le robot passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est $\frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{125}$.

$$p(E) = \frac{4}{125}.$$

3. Il y a $3! = 6$ trajets passant par les sommets S, I et X à savoir SIX, SXI, ISX, IXS, XSI et XIS. Chacun de ces trajets a une probabilité $\frac{4}{125}$ et donc $p(F) = 6 \times \frac{4}{125} = \frac{24}{125}$.

$$p(F) = \frac{24}{125}.$$

Partie B - Plusieurs robots

Notons X le nombre de robots passant successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le robot passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » avec une probabilité $p = \frac{4}{125}$ ou « le robot ne passe pas successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » avec une probabilité $1 - p = \frac{121}{125}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{4}{125}$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 1)$ et on a

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{4}{125}\right)^0 \times \left(\frac{121}{125}\right)^n = 1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n \geq 0,99 &\Leftrightarrow \left(\frac{121}{125}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{125}{121}\right)^n \geq 100 \text{ (car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{125}{121}\right)^n\right) \geq \ln(100) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{125}{121}\right) \geq \ln(100) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{125}{121}\right)} \text{ (car } \frac{125}{121} > 1 \text{ et donc } \ln\left(\frac{125}{121}\right) > 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 141,5 \dots \Leftrightarrow n \geq 142 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal cherché est 142.