EXERCICE 2 (3 points)

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I ou X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres.
- on ne tient pas compte des passages par le point O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$.
2. On note E l'événement :
   « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I, X dans cet ordre ».
   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.
3. On note F l'événement :
   « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les sommets S, I, X dans un ordre quelconque ».
   Déterminer la probabilité de F.

Partie B – Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement « au moins l'un de ces robots passe successivement par les sommets S, I, X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

EXERCICE 2

Partie A - Un seul robot

1. Notons p la probabilité que le robot passe par le sommet I. Alors,

$$1 = p(S) + p(I) + p(X) = 2p + p + 2p = 5p,$$

et donc $p = \dfrac{1}{5}$.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un robot passe par le sommet I est } \frac{1}{5}.}$$

2. Puisque les étapes sont indépendantes les unes des autres, la probabilité que le robot passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{125}$.

$$\boxed{p(E) = \frac{4}{125}.}$$

3. Il y a $3! = 6$ trajets passant par les sommets S, I et X à savoir SIX, SXI, ISX, IXS, XSI et XIS. Chacun de ces trajets a une probabilité $\dfrac{4}{125}$ et donc $p(F) = 6 \times \dfrac{4}{125} = \dfrac{24}{125}$.

$$\boxed{p(F) = \frac{24}{125}.}$$

Partie B - Plusieurs robots

Notons X le nombre de robots passant successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le robot passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » avec une probabilité $p = \dfrac{4}{125}$ ou « le robot ne passe pas successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{121}{125}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{4}{125}$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$ et on a

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{4}{125}\right)^0 \times \left(\frac{121}{125}\right)^n = 1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{121}{125}\right)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{125}{121}\right)^n &\geqslant 100 \text{ (car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[) \\
\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{125}{121}\right)^n\right) &\geqslant \ln(100) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[) \\
\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{125}{121}\right) \geqslant \ln(100) \Leftrightarrow n &\geqslant \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{125}{121}\right)} \text{ (car } \frac{125}{121} > 1 \text{ et donc } \ln\left(\frac{125}{121}\right) > 0) \\
\Leftrightarrow n \geqslant 141,5\ldots \Leftrightarrow n &\geqslant 142 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le nombre minimal cherché est } 142.}$$

