EXERCICE 3

1.	**FAUX**
2.	**VRAI**
3.	**VRAI**
4.	**VRAI**
5.	**FAUX**

Explications.

1. Notons X le nombre de boules blanches obtenues au bout de dix tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes (puisque les tirages se font avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule est blanche » avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$ ou « la boule est noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$ et on a

$$p(X=3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 120 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7.$$

Donc la proposition 1 est fausse.

2. Soit a un réel positif. $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$. On a aussi $p(X > a) = 1 - p(X \leqslant a) = e^{-\lambda a}$. Par suite,

$$p(X \leqslant a) = p(X > a) \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} \Leftrightarrow e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda a = -\ln 2 \Leftrightarrow a = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Donc la proposition 2 est vraie.

3. $z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Donc un argument de z est $-\frac{\pi}{3}$. Mais alors pour tout entier naturel n, un argument de z^n est $-n\frac{\pi}{3}$. Si de plus, n est un multiple de 3, on peut poser $n = 3p$ où p est un entier naturel. Un argument de z^n est alors $-n\frac{\pi}{3} = -p\pi$. Or, un nombre complexe d'argument $-p\pi$, $p \in \mathbb{N}$, est un nombre réel et donc si n est un multiple de 3, z^n est un nombre réel. La proposition 3 est vraie.

4. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BA}$ est $a - b = \left(1 - \frac{1+i}{2}\right)a = \frac{1-i}{2}a$. Puisque un nombre complexe et son conjugué ont même module, on a alors

$$AB = |b - a| = \left|\frac{1-i}{2}\right| |a| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |a| = |b| = OB.$$

Donc le triangle OAB est isocèle en B. De plus, $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $AB = OB = \frac{OA}{\sqrt{2}}$. Mais alors

$$OB^2 + AB^2 = \frac{OA^2}{2} + \frac{OA^2}{2} = OA^2.$$

Donc le triangle OAB est rectangle et isocèle en B. La proposition 4 est vraie.

5. Soit z un nombre complexe non nul.
On a $z' = -\frac{10}{\overline{z}} = -\frac{10z}{\overline{z}z} = -\frac{10}{|z|^2}z$ et donc, puisque $-\frac{10}{|z|^2}$ est un réel, $\overrightarrow{OM'} = -\frac{10}{|z|^2}\overrightarrow{OM}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et donc les points O, M et M' sont alignés. La proposition 5 est fausse.

