EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^7$. »

2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$.

   On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

   Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. »

3. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.

   Proposition 3 : « Si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors z^n est un réel. »

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, le point A d'affixe $a = 2 - i$ et le point B d'affixe $b = \frac{1+i}{2}a$.

   Proposition 4 : « Le triangle OAB est rectangle isocèle. »

5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, à tout point M du plan d'affixe z non nulle on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.

   Proposition 5 : « Il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés. »

EXERCICE 3

1.	**FAUX**
2.	**VRAI**
3.	**VRAI**
4.	**VRAI**
5.	**FAUX**

Explications.

1. Notons X le nombre de boules blanches obtenues au bout de dix tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes (puisque les tirages se font avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule est blanche » avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$ ou « la boule est noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$ et on a

$$p(X=3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 120 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7.$$

Donc la proposition 1 est fausse.

2. Soit a un réel positif. $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$. On a aussi $p(X > a) = 1 - p(X \leqslant a) = e^{-\lambda a}$. Par suite,

$$p(X \leqslant a) = p(X > a) \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} \Leftrightarrow e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda a = -\ln 2 \Leftrightarrow a = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Donc la proposition 2 est vraie.

3. $z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Donc un argument de z est $-\frac{\pi}{3}$. Mais alors pour tout entier naturel n, un argument de z^n est $-n\frac{\pi}{3}$. Si de plus, n est un multiple de 3, on peut poser $n = 3p$ où p est un entier naturel. Un argument de z^n est alors $-n\frac{\pi}{3} = -p\pi$. Or, un nombre complexe d'argument $-p\pi$, $p \in \mathbb{N}$, est un nombre réel et donc si n est un multiple de 3, z^n est un nombre réel. La proposition 3 est vraie.

4. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BA}$ est $a - b = \left(1 - \frac{1+i}{2}\right)a = \frac{1-i}{2}a$. Puisque un nombre complexe et son conjugué ont même module, on a alors

$$AB = |b - a| = \left|\frac{1-i}{2}\right||a| = \left|\frac{1+i}{2}\right||a| = |b| = OB.$$

Donc le triangle OAB est isocèle en B. De plus, $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $AB = OB = \frac{OA}{\sqrt{2}}$. Mais alors

$$OB^2 + AB^2 = \frac{OA^2}{2} + \frac{OA^2}{2} = OA^2.$$

Donc le triangle OAB est rectangle et isocèle en B. La proposition 4 est vraie.

5. Soit z un nombre complexe non nul.
On a $z' = -\frac{10}{\overline{z}} = -\frac{10z}{\overline{z}z} = -\frac{10}{|z|^2}z$ et donc, puisque $-\frac{10}{|z|^2}$ est un réel, $\overrightarrow{OM'} = -\frac{10}{|z|^2}\overrightarrow{OM}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et donc les points O, M et M' sont alignés. La proposition 5 est fausse.

