EXERCICE 3

1. a) L'événement A est l'événement $V_2 \cap V_3$. Puisque $p_1 = 1$, on a $p(V_2) = 0,6$ et $p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - p(V_2) = 0,4$. Ensuite,

$$p\left(V_2 \cap V_3\right) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36.$$

b) De même,

$$p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36.$$

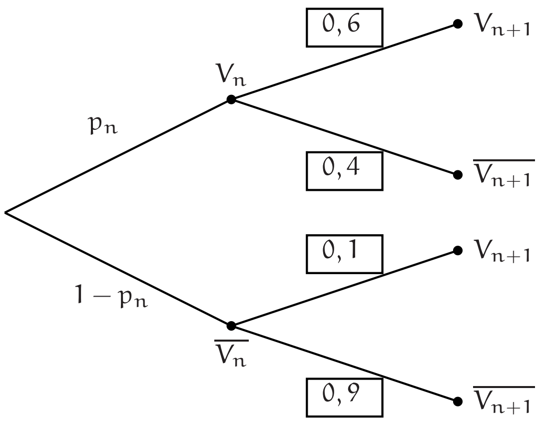
$$\boxed{p(A) = 0,36 \text{ et } p(B) = 0,36.}$$

2. On a aussi $p\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = p\left(\overline{V_2}\right) \times \left(1 - p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3})\right) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,04$. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_3 = p\left(V_2 \cap V_3\right) + p\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = 0,36 + 0,04 = 0,4.$$

$$\boxed{p_3 = 0,4.}$$

3.



4. Soit n un entier naturel non nul. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(V_{n+1}) = p\left(V_n \cap V_{n+1}\right) + p\left(\overline{V_n} \cap V_{n+1}\right) = p(V_n) \times p_{V_n}(V_{n+1}) + p\left(\overline{V_n}\right) \times p_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) \\ &= 0,6p_n + 0,1(1 - p_n) = 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,5p_n + 0,1. \end{aligned}$$

5. a) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,2) = 0,5u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times (0,5)^{n-1}$ puis que $p_n = u_n + 0,2 = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}.}$$

c) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,2.}$$

