

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'événement : « le n -ième sondage est positif » est noté V_n , on note p_n la probabilité de l'événement V_n .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :

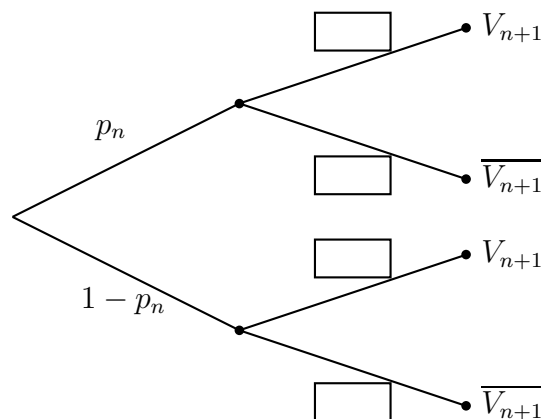
a) A : « les 2-ième et 3-ième sondages sont positifs » ;

b) B : « les 2-ième et 3-ième sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3-ième sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = p_n - 0,2$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.

b) Exprimer p_n en fonction de n .

c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n .

EXERCICE 3

1. a) L'événement A est l'événement $V_2 \cap V_3$. Puisque $p_1 = 1$, on a $p(V_2) = 0,6$ et $p(\overline{V_2}) = 1 - p(V_2) = 0,4$. Ensuite,

$$p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36.$$

b) De même,

$$p(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = p(\overline{V_2}) \times p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0,4 \times 0,9 = 0,36.$$

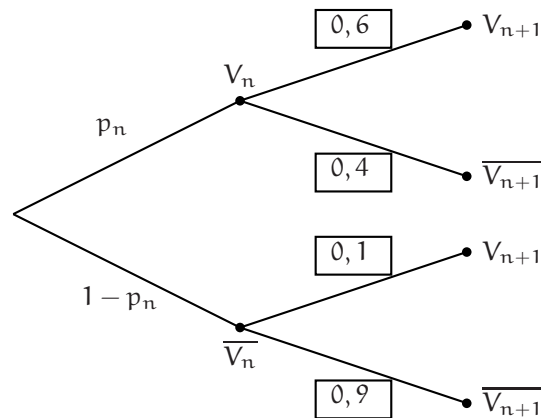
$$p(A) = 0,36 \text{ et } p(B) = 0,36.$$

2. On a aussi $p(\overline{V_2} \cap V_3) = p(\overline{V_2}) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = p(\overline{V_2}) \times (1 - p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3})) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,04$. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_3 = p(V_2 \cap V_3) + p(\overline{V_2} \cap V_3) = 0,36 + 0,04 = 0,4.$$

$$p_3 = 0,4.$$

3.



4. Soit n un entier naturel non nul. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(V_{n+1}) = p(V_n \cap V_{n+1}) + p(\overline{V_n} \cap V_{n+1}) = p(V_n) \times p_{V_n}(V_{n+1}) + p(\overline{V_n}) \times p_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) \\ &= 0,6p_n + 0,1(1 - p_n) = 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,5p_n + 0,1. \end{aligned}$$

5. a) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,2) = 0,5u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel non nul n , $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times (0,5)^{n-1}$ puis que $p_n = u_n + 0,2 = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}$.

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, u_n = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}.$$

c) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,2.$$