EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. *Dans cette question, les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.*

On prélève au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

a. Calculer la probabilité de l'événement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

b. Calculer la probabilité de l'événement D « le sac est défectueux ».

c. Calculer la probabilité de l'événement E « le sac ne présente aucun défaut ».

d. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$. On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des sacs est défectueux » ?
On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE 3

1) a) La probabilité demandée est $p(A \cap B)$. Puisque les événements A et B sont indépendants,

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,02 \times 0,01 = 0,0002.$$

$$\boxed{p(C) = 0,0002.}$$

b) L'événement « le sac est défectueux » est l'événement $A \cup B$ et la probabilité demandée est donc $p(A \cup B)$.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,02 + 0,01 - 0,0002 = 0,0298.$$

$$\boxed{p(D) = 0,0298.}$$

c) L'événement E est l'événement contraire de l'événement D et donc $p(E) = 1 - p(D) = 1 - 0,0298 = 0,9702$.

$$\boxed{p(E) = 0,9702.}$$

d) La probabilité demandée est $p_A(B)$.

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,0002}{0,02} = 0,01.$$

$$\boxed{p_A(B) = 0,01.}$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 100 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le sac est défectueux » avec une probabilité $p = 0,03$ et « le sac n'est pas défectueux » avec une probabilité $1 - p = 0,97$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

b) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$ et on a

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{100}{0}(0,03)^0(0,97)^{100} = 1 - (0,97)^{100} = 0,95 \text{ arrondi au centième.}$$

c) On sait que $E(X) = np = 100 \times 0,03 = 3$. Ceci signifie qu'en moyenne, dans un lot de 100 sacs, 3 sont défectueux.

