

EXERCICE 4 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué, la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

- a. Quelle loi de probabilité suit la variable X ?
- b. Quelle est son espérance ?
- c. Calculer $p(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les événements D et A suivants :

- D : « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
 - A : « obtenir exactement deux 6 ».
- a. Calculer la probabilité des événements suivants :
- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
 - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que $p(A) = \frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note B_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

- a. Déterminer, en fonction de n , la probabilité p_n de l'événement B_n .
- b. Calculer la limite de la suite (p_n) . Commenter ce résultat.